12. ÉVFOLYAM – JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. A $\{b_n\}$ számsorozatot a következőképpen definiáljuk:

$b_1 = 1 - \frac{1}{k}$, ahol a k 0-tól és 1-től különböző valós szám,

$b_n = 1 - \frac{1}{b_{n-1}}$, ha $n \geq 2$ egész szám.

Ha tudjuk, hogy $b_{2024} + b_{2025} = -1$, akkor mennyi lehet a k értéke?

dr. Bálint Béla, Zsolna

***Megoldás*:**

Kiszámoljuk a sorozat első pár tagját:

$$b_2 = 1 - \frac{1}{b_1} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = 1 - \frac{k}{k-1} = \frac{1}{1-k},$$

(1 pont)

$$b_3 = 1 - \frac{1}{b_2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-k}} = 1 - (1-k) = k\,.$$

(1 pont)

A $b_4 = 1 - \frac{1}{k} = b_1$ lesz, azaz számsorozat periodikus, ahol egy periódus három hosszúságú.

(2 pont)

Mivel $2024 = 674 \cdot 3 + 2$, így $b_{2024} = b_2 = \frac{1}{1-k}$, illetve $b_{2025} = b_3 = k$ lesz.

(1 pont)

Mindezek alapján, figyelembe véve, hogy $b_{2024} + b_{2025} = -1$, kapjuk, hogy

$\frac{1}{1-k} + k = -1$, azaz $1 + k - k^2 = -1 + k$, ahonnan

(2 pont)

$$k^2 - 2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet két megoldása $k_1 = \sqrt{2}$ és $k_2 = -\sqrt{2}$, amelyek teljesítik a kezdeti feltételeket.

(1 pont)

Tehát, ha a $k = \sqrt{2}$ vagy $k = -\sqrt{2}$, teljesül a kért egyenlőség.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

Megjegyzés:

A 10/1 feladat 2. megoldásában leírt gondolatmenettel analóg módon bebizonyítható, hogy teljesül a $b_k \cdot b_{k+1} \cdot b_{k+2} = -1$ (azaz a számsorozat bármely három egymást követő tagjának szorzata -1) egyenlőség, mely összefüggés segítségével, felhasználva, hogy $b_{2024} + b_{2025} = -1$, meghatározhatók a k lehetséges értékei.

2. Hány olyan részhalmaza van az $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$ halmaznak, amelyre teljesül, hogy elemeinek száma olyan pozitív egész szám, ami nem eleme a részhalmaznak?

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Megoldás:

Mivel az elemek száma pozitív, így az üres halmazról nem lehet szó.

(1 pont)

A teljes halmaz szintén nem megfelelő, hiszen 10 eleme van, de a 10 is eleme a halmaznak.

(1 pont)

Tehát az elemek száma a részhalmazokban $1, 2, \dots, 9$ lehet.

(1 pont)

Jelöljük a megfelelő részhalmaz elemeinek számát k-val. A kérdés az, hogy hány darab k elemű részhalmaza van az alaphalmaznak, amely nem tartalmazza a k-t.
Az alaphalmazból a k-t elhagyva 9 szám marad.

(1 pont)

Ebből kell k darabot kiválasztani, erre $\binom{9}{k}$ lehetőség áll rendelkezésre.

(1 pont)

Így az összes eset száma

$$\sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k}$$

(2 pont)

amely a Pascal-háromszög ismert tulajdonsága (vagy a binomiális-tétel) miatt $2^9 - 1 = 511$.

(2 pont)

Összesen: 9 pont

3. Adott a síkon 2025 darab pont úgy, hogy bármelyik két pont távolsága legfeljebb 3 cm. Igazoljuk, hogy az összes pont lefedhető egy 8,1 cm^2-nél kisebb területű hatszöglappal.

Császár Sándor, Csíkszereda

***Megoldás*:**

A feladat megoldásához azt fogjuk megmutatni, hogy egy d átmérőjű ponthalmaz (egy véges ponthalmaz átmérőjén a pontokat összekötő szakaszok maximumát értjük, jelen esetben $d \leq 3$) lefedhető egy $\frac{d}{\sqrt{3}}$ oldalú szabályos hatszöglappal (ennek bizonyítása megtalálható például Reiman István: Geometria és határterületei című könyvében a 316.-318. oldalon). Ehhez a versenyeken általában előforduló ismeretek mellett a folytonosság fogalmát, illetve Bolzano tételét is fel fogjuk használni.

(Bolzano tétele kimondja, hogy ha $f(x)$ az $[a; b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor létezik olyan $x \in\ ]a; b[$, amelyre $f(x) = 0$. A tétel bizonyítása megtalálható például dr. Pintér Lajos: Analízis I. című, speciális matematika tagozatosoknak írt tankönyvében a 202.-203. oldalon, vagy Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: Analízis I.-II. című könyvében, és számos internetes oldalon, például

https://benjoey.web.elte.hu/Analizis%202/KisZH%20elm%C3%A9let/kiszh_03.pdf.)

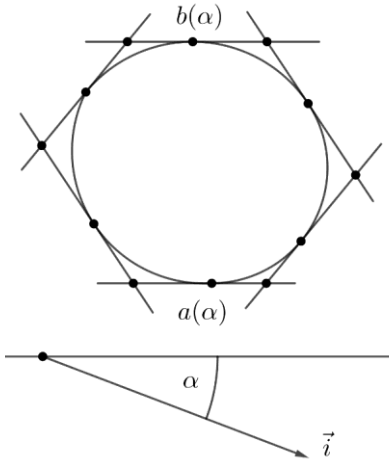
Könnyen belátható, hogy egy véges ponthalmazt bármely iránnyal párhuzamosan közre lehet fogni két párhuzamos, úgynevezett támaszegyenessel (ponthalmaz támaszegyenesének nevezünk egy egyenest, ha annak van a ponthalmazzal legalább egy közös pontja, és a ponthalmaz minden pontja - a közös pontok kivételével - az egyenesnek ugyanarra az oldalára esik).

Ha megadtunk két ilyen párhuzamos támaszegyenest, akkor tudunk ezzel $60°$-ot bezáró további két pár párhuzamos támaszegyenest is megadni, vagyis be tudjuk „zárni” a ponthalmazt egy egyenlő szögű hatszögbe.

(1 pont)

Megadunk a síkon egy irányt az $\vec{\imath}$ vektorral. Ezután tetszőleges α szöghöz meg tudunk adni két olyan támaszegyenest, amelyek párhuzamosak, α szöget zárnak be a megadott iránnyal és közrefogják a ponthalmazt. Ehhez a két párhuzamos támaszegyeneshez is felépíthető (a fentiekben már megismert módon) egy egyenlő szögekkel rendelkező hatszög. Legyen egy ilyen, az $\vec{\imath}$ vektorral α szöget bezáró támaszegyenesen a hatszög oldala $a(\alpha)$, a szemközti hatszögoldal pedig $b(\alpha)$.

(1 pont)



1. ábra

(1 pont)

Ha a bennfoglaló hatszögek képzése során bármikor elfajuló eset fordul elő - négyszöget vagy ötszöget kapunk-, akkor ezekben az esetekben is érvényes marad a területekre vonatkozó feltétel. (Pl. négyszög esetében annak az átlói is legfeljebb d hosszúságúak lehetnek. Ezért, ha a négyszög átlói e és f, a két átló által bezárt szög γ, akkor a négyszög területére

$$T = \frac{e \cdot f \cdot \sin\gamma}{2} \leq \frac{d^2}{2}$$

azaz T legfeljebb az átlók szorzatának a fele, tehát esetünkben legfeljebb 4,5.

Ezt a négyszöget pedig egyszerűen „ki tudjuk bővíteni” egy olyan hatszögre, melynek területe kisebb lesz 8,1-nél.)

(1 pont)

A hatszögek esetére először azt mutatjuk meg, hogy ezek között a hatszögek között van olyan, amelynek két szemközti oldala egyforma hosszúságú. Tegyük fel ugyanis, hogy valamilyen α -ra $a(\alpha) < b(\alpha)$, vagyis

(1) $$a(\alpha) - b(\alpha) < 0\,.$$

Mivel α -hoz és $(\pi + \alpha)$-hoz ugyanaz a köréírt hatszög tartozik, továbbá $a(\pi + \alpha) = b(\alpha)$ és $b(\pi + \alpha) = a(\alpha)$, ezért

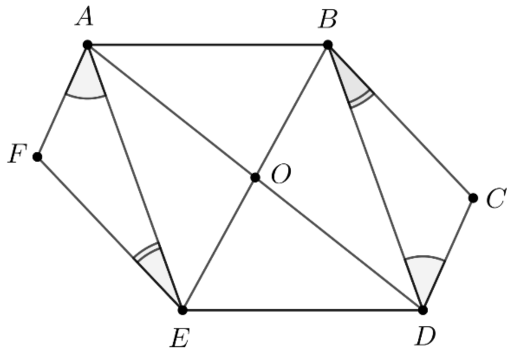
(2) $$a(\pi + \alpha) - b(\pi + \alpha) = b(\alpha) - a(\alpha) > 0.$$

(1 pont)

Az $f(\varphi) = a(\varphi) - b(\varphi)$ függvény folytonossága, valamint az (1) és (2) miatt a Bolzano-tételből következően az $]\alpha; \pi + \alpha[$ intervallumon lesz olyan β szög, amelyre $a(\beta) - b(\beta) = 0$, tehát $a(\beta) = b(\beta)$.

(1 pont)

Az ehhez a β szöghöz tartozó körülírt, egyenlő szögű hatszögnek van két párhuzamos és egyenlő oldala. Legyen ez a két egyenlő hosszúságú oldal az $ABCDEF$ hatszögben AB és DE a 2. ábra szerint.



2. ábra

(1 pont)

Az $ABDE$ négyszög $AB = DE$ miatt paralelogramma, tehát $AE = BD$. Ez alapján a BCD és az EFA háromszögek egybevágók, hiszen megfelelő szögeik is megegyeznek. Ezzel beláttuk, hogy az $ABCDEF$ hatszög szemközti oldalai megegyeznek, sőt a hatszög középpontosan szimmetrikus is az $ABDE$ paralelogramma O középpontjára.

(1 pont)

Ha ez a hatszög nem lenne szabályos, akkor szemközti oldalait széthúzhatjuk úgy, hogy valamennyi oldal távolsága a középponttól éppen $\frac{d}{2}$ legyen. Így valamennyi oldal egyenlő távolságra lesz a középponttól, a hatszög tehát szabályos és oldala $\frac{d}{\sqrt{3}}$ hosszúságú.

(1 pont)

A $\frac{d}{\sqrt{3}}$ oldalú szabályos hatszög területe

$$6 \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{12} = \frac{d^2\sqrt{3}}{2}.$$

A feladatban szereplő $d \leq 3$ feltétel alapján $\frac{d^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \leq \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 7{,}794 < 8{,}1$, így ezzel az állítást beláttuk.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

4. Az 1 m^3 térfogatú téglatest alakú doboz két oldallapja nyolcszor drágább anyagból készül, mint a többi négy oldallap. Milyen méretűnek válasszuk a téglatest éleit, hogy minél kisebb legyen az anyagköltség?

Szabó Magda, Szabadka

Megoldás:
Az anyagköltség a lapok területével arányos. Legyen az olcsóbb lap 1 m^2-nek az anyagköltsége egységnyi. Legyenek x, y és z a téglatest élei, ahol az x, y, z pozitív valós számok. Ismerve, hogy $V = xyz = 1$, célunk a téglatest $A = 2xy + 2yz + 2xz$ felszínének minimalizálása az adott feltételek alapján. Két esetet különböztetünk meg attól függően, hogy a drágább anyagú oldallapok

a) szomszédosak vagy
b) nem szomszédosak.

(1 pont)

a) Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy egy-egy xy, illetve yz területű oldallap készült drágább anyagból. Ekkor

$$A_1 = 8xy + 8yz + xy + yz + 2xz = 9xy + 9yz + 2xz\,.$$

(1 pont)

A számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján $(a + b + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{abc})$, felhasználva, hogy $xyz = 1$, kapjuk:

$$A_1 = 9xy + 9yz + 2xz \geq 3 \cdot \sqrt[3]{9xy \cdot 9yz \cdot 2xz} = 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^4 \cdot (xyz)^2} = 9 \cdot \sqrt[3]{6}\,.$$

(2 pont)

b) Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a két xy területű oldallap készült drágább anyagból. Ekkor

$$A_2 = 8 \cdot 2xy + 2yz + 2xz = 16xy + 2yz + 2xz\,.$$

Ismét alkalmazva a számtani és mértani közép közötti összefüggést, valamint az $xyz = 1$ feltételt:

$$A_2 = 16xy + 2yz + 2xz \geq 3 \cdot \sqrt[3]{16xy \cdot 2yz \cdot 2xz} = 3 \cdot \sqrt[3]{2^6 \cdot (xyz)^2} = 12\,.$$

(2 pont)

Mivel

$$\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{27 \cdot 6}\text{, azaz } 4 < 3 \cdot \sqrt[3]{6}\text{, így } 12 < 9 \cdot \sqrt[3]{6}\,,$$

(1 pont)

ezért az A_2 minimális értéke kisebb, mint A_1-é. Ezt a minimális értéket az A_2 akkor veszi fel, ha $16xy = 2yz = 2xz$, ahonnan az $x = y$ és a $z = 8x$ esetben.

(1 pont)

Felhasználva, hogy $V = xyz = 1$, így a $8x^3 = 1$ alapján $x = y = \frac{1}{2}$, $z = 4$ lesz, azaz a doboz anyagának akkor a legkisebb az előállítási költsége, ha a drágább anyagból készült szemközti oldallapok $\frac{1}{2}$ méter oldalhosszúságú négyzetek, és ezek 4 méter távolságra vannak egymástól.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$\sqrt{13+\sqrt{\frac{27}{3x^2+2x-5}}}=13-\frac{27}{3x^2+2x-5}$$

Bíró Bálint, Eger

1. megoldás:

A négyzetgyök értelmezése és a törtek nevezői miatt $3x^2+2x-5>0$, ezért az $x<-\frac{5}{3}$ vagy $1<x$.

(1 pont)

Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a=\sqrt{13+\sqrt{\frac{27}{3x^2+2x-5}}} \text{ és } b=\sqrt{\frac{27}{3x^2+2x-5}}.$$

(1 pont)

Belátható, hogy a feltételek miatt $a>0$ és $b>0$. A helyettesítések után egyrészt azt kapjuk, hogy $a^2-b=13$, másrészt az eredeti egyenlet jobb oldala miatt nyilvánvaló, hogy $13-\frac{27}{3x^2+2x-5}=a$ is teljesül, ezért az $a+b^2=13$ is fennáll. Eszerint $a^2-b=a+b^2$, azaz $a^2-b^2-(a+b)=0$, szorzattá alakítás után pedig $(a+b)\cdot(a-b-1)=0$.

(3 pont)

Mivel $a>0$ és $b>0$, ezért csak az $a-b-1=0$ lehetséges, amelyből $a=b+1$ következik. Ezzel az eredeti egyenlet $\sqrt{13+b}=b+1$ alakban is felírható, amelyből négyzetre emeléssel és rendezéssel a $b^2+b-12=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei $b_1=3$ és $b_2=-4$. A $b_2=-4$ nem ad megoldást, mert $b>0$ kell legyen, így csak $b=3$ lehetséges.

Ebből az adódik, hogy $\sqrt{\frac{27}{3x^2+2x-5}}=3$, ahonnan négyzetre emelés, egyszerűsítés és rendezés után a $3x^2+2x-8=0$ egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $x_1=\frac{4}{3}$ és $x_2=-2$.

(3 pont)

Mindkét valós szám megfelel a feltételeknek és behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy valóban megoldásai az eredeti egyenletnek (mindkét esetben az egyenlet két oldalának helyettesítési értéke 4 lesz).

(1 pont)

Összesen: 9 pont

2. megoldás:

A négyzetgyök értelmezése és a törtek nevezői miatt $3x^2+2x-5>0$, ezért az $x<-\frac{5}{3}$ vagy $1<x$.

(1 pont)

Vezessünk be új ismeretlent:

$$t=\sqrt{\frac{27}{3x^2+2x-5}}.$$

(1 pont)

Belátható, hogy a feltételek miatt $t>0$. A helyettesítések után kapjuk, hogy $\sqrt{13+t}=13-t^2$, amely átrendezés után, hogy $t^2=13-\sqrt{13+t}$ alakra hozható.

(1 pont)

Mindkét oldalhoz $t+\frac{1}{4}$-et adva a $t^2+t+\frac{1}{4}=13+t-\sqrt{13+t}+\frac{1}{4}$ egyenlethez jutunk, ami átírható $\left(t+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{13+t}-\frac{1}{2}\right)^2$ alakra.

(2 pont)

Mivel $t>0$, így egyszerűen belátható, hogy $\sqrt{13+t}>\sqrt{13}>\frac{1}{2}$. Mindezek alapján a fenti egyenletből kapjuk, hogy $t+\frac{1}{2}=\sqrt{13+t}-\frac{1}{2}$, amiből átrendezéssel $t+1=\sqrt{13+t}$ következik.

(1 pont)

Négyzetre emeléssel és rendezéssel a $t^2+t-12=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei $t_1=3$ és $t_2=-4$.

(1 pont)

A $t_2=-4$ nem ad megoldást, mert $t>0$ kell legyen, így csak $t=3$ lehetséges.
Ebből az adódik, hogy $\sqrt{\frac{27}{3x^2+2x-5}}=3$, ahonnan négyzetre emelés, egyszerűsítés és rendezés után a $3x^2+2x-8=0$ egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $x_1=\frac{4}{3}$ és $x_2=-2$.

(2 pont)

Mindkét valós szám megfelel a feltételeknek és behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy valóban megoldásai az eredeti egyenletnek (mindkét esetben az egyenlet két oldalának helyettesítési értéke 4 lesz).

(1 pont)

Összesen: 9 pont

6. Egy háromszög a, b, c oldalainak hossza ebben a sorrendben egy növekvő mértani sorozat három egymást követő tagja. Ha a háromszög szögei (a szokásos jelölésekkel) α, β, γ, akkor igazoljuk az alábbi állításokat:

a) $\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}>\frac{1}{\sin\alpha}$,

b) $\sin\beta+\sin\gamma<\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\sin\alpha$.

dr. Molnár István, Gyula

Megoldás:

a) Legyen q a mértani sorozat állandó hányadosa (kvóciense). A feladat feltételei alapján $q>1$ valós szám. A háromszög oldalainak hossza így $a=x$, $b=xq$, $c=xq^2$ lesznek, ahol x pozitív valós szám.

(1 pont)

Mivel $a<b<c$, ezért a $c<a+b$ (háromszög-egyenlőtlenség) feltételnek is teljesülnie kell, vagyis $xq^2<x+xq$ kell legyen.

(1 pont)

Alkalmazva az $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ (szinusztétel) összefüggést (ahol az R a háromszög köré írható kör sugara), kapjuk, hogy

$$xq^2<x+xq \mid :x^2q^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x}<\frac{1}{xq^2}+\frac{1}{xq} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a}<\frac{1}{c}+\frac{1}{b} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2R\cdot\sin\alpha}<\frac{1}{2R\cdot\sin\gamma}+\frac{1}{2R\cdot\sin\beta}\ \Bigg|\cdot(2R) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sin\alpha}<\frac{1}{\sin\gamma}+\frac{1}{\sin\beta},$$

ami éppen a bizonyítandó $\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}>\frac{1}{\sin\alpha}$ összefüggés.

(2 pont)

b) Az a) esetben bebizonyítottuk, hogy $xq^2<x+xq$, ahonnan, mivel az x pozitív valós szám, következik, hogy $q^2<1+q$.

Az egyenlőtlenség megoldása $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ahonnan a $q>1$ feltételt figyelembe véve, ezért

$$1<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(2 pont)

Ezáltal

$$\sin\beta+\sin\gamma=\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{xq+xq^2}{2R}=\frac{x}{2R}\cdot\left(q+q^2\right)=\frac{a}{2R}\cdot\left(q+q^2\right)=\left(q+q^2\right)\cdot\sin\alpha.$$

(1 pont)

Mivel $1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ezért

$$1 < q^2 < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

így

$$q + q^2 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}.$$

(1 pont)

Mindezeket figyelembe véve

$$\sin\beta + \sin\gamma = (q + q^2) \cdot \sin\alpha < \left(2 + \sqrt{5}\right) \cdot \sin\alpha,$$

azaz

$$\sin\beta + \sin\gamma < \left(2 + \sqrt{5}\right) \cdot \sin\alpha,$$

és ez az, amit bizonyítani akartunk.

(1 pont)

Összesen: 9 pont