1. Határozzuk meg az (1) és (2) egyenletek összes közös gyökét:

(1) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$,

(2) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = 0$.

dr. Bálint Béla, Zsolna

1. megoldás:

Ha egy szám közös gyöke az $A(x) = 0$ és $B(x) = 0$ egyenleteknek, akkor gyöke a $\lambda \cdot A + \mu \cdot B = 0$ egyenletnek is, ahol λ és μ tetszőleges konstansok vagy x polinomjai.
Ezt többször felhasználjuk a megoldás során.

(2 pont)

Ha az (1)-ből kivonjuk a (2) x-szeresét, akkor kapjuk

$(3) \equiv (1) - (2) \cdot x \qquad x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0.$

(2 pont)

Hasonlóan tovább:

$(4) \equiv (3) - (2) \qquad 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 = 0$,

(1 pont)

$(5) \equiv 3 \cdot (3) - x \cdot (4) \qquad 4x^3 - 5x^2 - 18x - 9 = 0,$

(2 pont)

$(6) \equiv 3 \cdot (5) - 4 \cdot (4) \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$.

(1 pont)

A (6) egyenlet gyökei 3 és -1. Behelyettesítéssel belátjuk, hogy ezek gyökei az (1)-nek és a (2)-nek is.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

1. megjegyzés:

Azt, hogy az összes közös gyökök ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei, úgy is beláthatjuk, hogy az (1) és (2) egyenletekben szereplő polinomokat elosztjuk az $x^2 - 2x - 3$ polinommal.

$(x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 3):(x^2 - 2x - 3) = x^3 + x + 1$ és
$(x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3):(x^2 - 2x - 3) = x^2 - x - 1.$

Mindkét polinom maradék nélkül osztható az $x^2 - 2x - 3$ polinommal. A polinomosztásoknál hányadosként kapott $x^2 - x - 1$ és $x^3 + x + 1$ polinomokról külön is belátható, hogy nincs közös gyökük, például, ha az összegüket vesszük, akkor az $x^3 + x^2$polinomot kapjuk. Ennek gyökei között kellene lenniük a közös gyököknek is. Ennek a polinomnak csak 0 és -1 a gyökei, ezek pedig egyik hányadospolinomnak sem gyökei.

2. megjegyzés:

Az első 2 pont közül az egyik akkor is jár, ha külön hivatkozás nélkül használja a versenyző a közös gyökök kereséséhez a lineáris kombinációkat, akár egyéni jelölésrendszerrel is.

***2. megoldás**:*

A feladat megoldása úgy is lehetséges, hogy például megkeressük a második egyenlet összes megoldásait és azok közül kiválasztjuk azokat, amelyek az elsőnek is megoldásai. (Ha ezt nem jelzi a megoldó, de alkalmazza, akkor is jár az 1 pont.)

(1 pont)

Az $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = 0$ egyenletben a főegyüttható 1, tehát a racionális gyökteszt alapján, ha van racionális gyök, akkor az csak egész lehet. Ezek az egészek csak a konstans tag, a 3 osztói közül kerülhetnek ki.

(1 pont)

A 3 prímszám, így a szóba jöhető racionális, illetve egész megoldások csak

$$x = 3;\ -3;\ 1;\ -1$$

(1 pont)

A négy behelyettesítés között két esetben kapunk nullát, 3 és -1 gyökei a (2) egyenletnek. Kiemelve az ezekhez tartozó gyöktényezőket:

$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x - x + 3 =$

$= x^3(x-3) - 2x(x-3) - (x-3) = (x-3)(x^3 - 2x - 1) = (x-3)(x^3 + 1 - 2x - 2) =$

$= (x-3)[(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1)] = (x-3)(x+1)(x^2 - x - 1)$

(3 pont)

Behelyettesítve a 3 és -1 értékeket az első egyenletbe belátjuk, hogy ezek közös gyökök.

(1 pont)

Mi a helyzet az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet szintén valós gyökeivel?

Pl. polinomosztással belátjuk, hogy ezek gyökei nem gyökei az (1) egyenletnek.

$x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 3 =$

$= x^5 - x^4 - x^3 - x^4 + x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 4x^2 + 4x + 4 - 11x - 7 =$

$= (x^2 - x - 1)(x^3 - x^2 + 2x - 4) + 11x - 7.$

Az $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke sem közös gyök.

(2 pont)

Összesen: 9 pont

***3. megoldás*:**
Alkalmazzuk az 1. megoldásban az (1) és (2) egyenletek lineáris kombinációjára vonatkozó tételt $\lambda = 1;\ \mu = 1$ választással. Ez azt jelenti, hogy az (1) és (2) egyenletek megfelelő oldalainak összege zérus, azaz

$$x^5 - x^4 - 5x^3 - 3x^2 = 0\,.$$

(1 pont)

A kapott egyenlet bal oldalán kiemelhetünk x^2-et:

$$x^2 \cdot (x^3 - x^2 - 5x - 3) = 0\,.$$

(1 pont)

Az $x^2 = 0$ egyenletből nem kapunk megoldást, mert az ebből következő $x = 0$ sem az (1), sem a (2) egyenletnek nem megoldása.

(1 pont)

Ebből az következik, hogy csak $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ lehetséges, az (1) és (2) egyenlet összes lehetséges közös megoldása ennek az egyenletnek a gyöke. Egyszerű számolással kapjuk, hogy az egyenlet egyik megoldása $x = -1$.

(1 pont)

Innen például polinomosztással adódik, hogy $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3) = 0$, ezért most az $x^2 - 2x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásait keressük.

Az $x^2 - 2x - 3 = 0$ megoldásai $x = -1$ és $x = 3$.

(1 pont)

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $x = -1$ és $x = 3$ az (1) és (2) egyenletek közös gyöke, vagyis az $x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 3$ és $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ polinom is maradék nélkül osztható az $x^2 - 2x - 3$ polinommal.

(1 pont)

Polinomosztással adódik, hogy

$$x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x^2 - 2x - 3)(x^3 + x + 1),$$
$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - x - 1)\,.$$

(1 pont)

Az utóbbi két egyenletből származó $x^3 + x + 1 = 0$ és $x^2 - x - 1 = 0$ egyenletek lehetséges közös valós gyökeit a két egyenlet összeadásával kapott $x^3 + x^2 = 0$ egyenletből kaphatjuk meg. Szorzattá alakítás után $x^2(x + 1) = 0$, amelynek megoldásai $x = 0$ és $x = -1$.

Az így kapott két valós szám behelyettesítésekor azonban $x^3 + x + 1 \neq 0$ és $x^2 - x - 1 \neq 0$, eszerint az $x^3 + x + 1 = 0$ és $x^2 - x - 1 = 0$ egyenleteknek nincs közös valós gyöke. *(1 pont)*

Tehát az (1) és (2) egyenletek összes közös gyöke $x = -1$ és $x = 3$.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

2. 12 darab 80 literes hordóban vizet tárolunk, mégpedig rendre 1, 2, 3, 4, …, 12 litert. Bármelyik hordóból önthetünk át vizet egy másik hordóba a következő szabály szerint: ha az első hordóban legalább annyi víz van, mint a másodikban, akkor az első hordóból pontosan annyi vizet önthetünk át a másodikba, amennyi a másodikban van. Lehetséges-e véges számú átöntés után elérni azt, hogy

a) 5 hordóban legyen 3-3 liter víz, a maradék 7 hordóban pedig 6, 7, 8, …, 12 liter;
b) egy hordóban legyen 78 liter víz?

Béres Zoltán, Zenta

Megoldás:
Az átöntések során a hordóban lévő víz mennyisége mindig nem negatív egész számú literben mérhető. Vizsgáljuk meg ezeknek az egész számoknak a paritását az A hordóból B hordóba való átöntéskor:

	átöntés előtt		átöntés után	
	A hordó	B hordó	A hordó	B hordó
1.	páros	páros	páros	páros
2.	páros	páratlan	páratlan	páros
3.	páratlan	páros	páratlan	páros
4.	páratlan	páratlan	páros	páros

(3 pont)

Nevezzük a hordókat párosnak vagy páratlannak attól függően, hogy a bennük lévő víz mennyisége páros vagy páratlan literben mérhető. A táblázat elemzésével a következő megállapításokat tehetjük:

1) Minden átöntés alkalmával a páratlan hordók száma vagy nem változik (1., 2. és 3. sor), vagy csökken (4. sor);
2) Minden átöntés alkalmával a második, vagyis a B hordó páros.

(2 pont)

Most már meg tudjuk válaszolni a föltett kérdéseket:

a) Nem lehetséges, mert kezdetben 6 páratlan hordónk van, az a) állapot szerint viszont 8 darab:
$$3, 3, 3, 3, 3, 7, 9, 11\,.$$
Ez pedig ellentmond az 1) megállapításunknak, mert nőtt a páratlan hordók száma.

(2 pont)

b) Nem lehetséges. Tudjuk, hogy $1 + 2 + 3 + \cdots + 12 = 78$, vagyis a b) szerinti állapotban egy hordóban 78 liter víz van, az összes többi pedig üres. Ezt egyetlen helyzet előzheti meg, a 39, 39, és a többiben pedig 0 liter, ezt a helyzetet viszont csak úgy kaphattuk, hogy valamelyik 39 litert tartalmazó hordóba vizet öntöttünk (a többibe nem önthettünk vizet mert ott 0 liter van), ami ellentmond a második megállapításunknak, mivel a 39 páratlan szám.

(2 pont)

Összesen: 9 pont

3. Egy játék kezdetén a táblára felírták a 10-es számot. Anna és Boglárka felváltva lépnek, Anna lép először. Egy lépésben le kell törölni a táblán lévő számot, és helyette egy olyan egész számot kell felírni, amely a letörölt számnál nagyobb, de annak négyszeresénél nem nagyobb. Az nyeri a játékot, aki felírja a táblára a 2025-öt. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Adjuk meg ezt a nyerő stratégiát.

Erdős Gábor, Nagykanizsa

Megoldás:
Annának van nyerő stratégiája.
Visszafelé gondolkodva:
Mivel $2025 = 506 \cdot 4 + 1$, ezért akkor tudja felírni Anna a 2025-öt, ha a táblán lévő szám 507 vagy annál nagyobb. Ezt elérheti úgy, ha előtte ő az 506-ot írja fel a táblára.

(3 pont)

Mivel $506 = 126 \cdot 4 + 2$, ezért akkor tudja felírni Anna az 506-ot, ha előtte a táblán egy 126-nál nagyobb szám szerepel. Ezt elérheti úgy, ha előtte ő a 126-ot írja fel.

(2 pont)

Mivel $126 = 31 \cdot 4 + 2$, ezért akkor tudja felírni Anna az 126-ot, ha előtte a táblán egy 31-nél nagyobb szám szerepel. Ezt elérheti úgy, ha előtte ő a 31-et írja fel.

(2 pont)

Mivel a 31 kisebb, mint a táblán lévő 10-nek a négyszerese, ezért Anna első lépésként fel tudja írni a 31-et, és ezt a stratégiát alkalmazva biztosan nyerni tud.

(2 pont)

Összesen: 9 pont

4. Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 20°$ és $BCA\sphericalangle = 30°$, legyen M pont a háromszög belső tartományában úgy, hogy $MAC\sphericalangle = MCA\sphericalangle = 10°$. Számítsuk ki a $BMC\sphericalangle$ nagyságát.

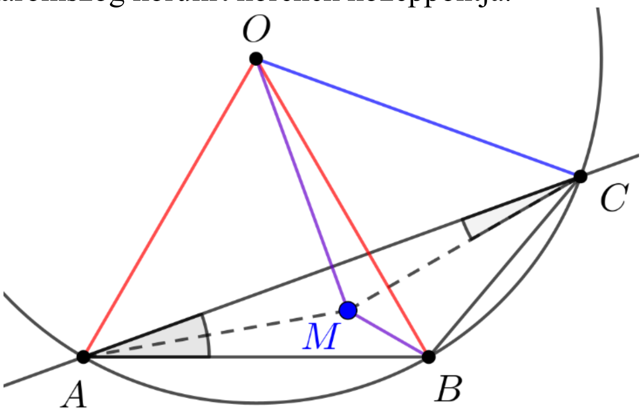
dr. Ripcó Sipos Elvira, Zenta

1. megoldás:

Az adatok alapján az ACM_Δ egyenlő szárú háromszög, a szárak M metszéspontja illeszkedik az AC felezőmerőlegesére.

(1 pont)

Legyen O pont az ABC háromszög körülírt körének középpontja.



A BC húrhoz tartozó kerületi és középponti szögeket vizsgáljuk.
Mivel $BAC\sphericalangle = 20°$, ezért a kerületi és középponti szögek összefüggése alapján a $BOC\sphericalangle$ középponti szögre $BOC\sphericalangle = 40°$, ezért a BOC_Δ egyenlő szárú háromszögben $OBC\sphericalangle = 70°$.

(1 pont)

Hasonlóan kapjuk, hogy $AOB\sphericalangle = 2 \cdot ACB\sphericalangle = 60°$, de mivel az AOB_Δ háromszög egyenlő szárú is, hiszen $AO = BO$ a kör sugarai, ezért $AOB\sphericalangle = 60°$ miatt AOB_Δ szabályos, azaz $AB = AO = BO$.

(1 pont)

Az $MAC\sphericalangle = 10°$ illetve $CAB\sphericalangle = 20°$ feltételek és $BAO\sphericalangle = 60°$ miatt egyrészt $BAM\sphericalangle = 10°$, másrészt

$$OAM\sphericalangle = 60° - 10° = 50°.$$

(2 pont)

Látható, hogy $AOC\sphericalangle = AOB\sphericalangle + BOC\sphericalangle = 60° + 40° = 100°$, és mivel M az AC felezőmerőlegesén van, ezért $AOM\measuredangle = 50°$. Tehát az AMO_Δ egyenlő szárú, ezért $AM = OM$.

(2 pont)

Ugyanakkor $AB = OB$ és $AM = OM$, vagyis az ABM és OBM háromszögek egybevágók, ebből viszont az következik, hogy $ABM\sphericalangle = OBM\sphericalangle = 30°$ és eszerint a BM egyenes az OA szakasz felezőmerőlegese, emiatt pedig

$$MBC\sphericalangle = OBM\sphericalangle + OBC\sphericalangle = 30° + 70° = 100°.$$

(2 pont)

Végül a BCM háromszögből $BMC\sphericalangle = 180° - 100° - 20° = 60°$.

(1 pont)

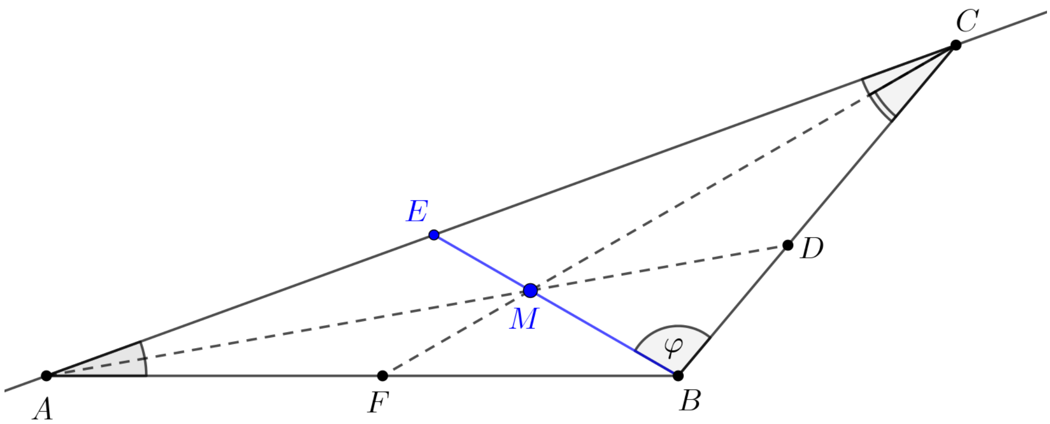
Összesen: 9 pont

2. megoldás:

Messék az AM, BM, CM egyenesek a háromszög szemben levő oldalait rendre a D, E, F pontban. A feltételek miatt $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle = 10°$ és $ACF\sphericalangle = 10°$ illetve $FCB\sphericalangle = 20°$. Legyen $CBE\sphericalangle = \varphi$, ekkor $CBA\sphericalangle = 130°$ miatt $EBA\sphericalangle = 130° - \varphi$.

(1 pont)

Az AM, BM, CM egyenesek egy ponton haladnak át, ezért alkalmazhatjuk a trigonometrikus Ceva-tételt.



Eszerint

$$\frac{\sin BAD\sphericalangle}{\sin DAC\sphericalangle} \cdot \frac{\sin CBE\sphericalangle}{\sin EBA\sphericalangle} \cdot \frac{\sin ACF\sphericalangle}{\sin FCB\sphericalangle} = 1,$$

azaz

$$\frac{\sin 10°}{\sin 10°} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin(130° - \varphi)} \cdot \frac{\sin 10°}{\sin 20°} = 1.$$

(2 pont)

Ebből a $\sin 20° = 2 \cdot \sin 10° \cdot \cos 10°$ trigonometriai azonosság felhasználása és az egyszerűsítések, illetve rendezés után

(1) $$2 \cdot \cos 10° \cdot \sin(130° - \varphi) = \sin \varphi$$

következik.

(1 pont)

Alkalmazzuk a

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

azonosságot az

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 10°, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = 130° - \varphi$$

választással, amelyből a két egyenlet megfelelő oldalainak összeadásával, illetve kivonásával $\alpha = 140° - \varphi$ és $\beta = 120° - \varphi$. Így az (1) összefüggésből

$$\sin(140° - \varphi) + \sin(120° - \varphi) = \sin \varphi,$$

azaz

(2) $$\sin(140° - \varphi) = \sin\varphi - \sin(120° - \varphi)\,.$$

(2 pont)

A (2) egyenlőség jobb oldalát átalakíthatjuk a

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

azonosság segítségével úgy, hogy $\alpha = \varphi$ és $\beta = 120° - \varphi$.
Eszerint

$$\sin(140° - \varphi) = 2\cdot\cos 60°\cdot\sin(\varphi - 60°)\,,$$

ebből pedig $\cos 60° = \frac{1}{2}$ alapján

(3) $$\sin(140° - \varphi) = \sin(\varphi - 60°)$$

következik.

(1 pont)

A (3) összefüggés kétféleképpen állhat fenn:

(a) $$140° - \varphi = \varphi - 60°,$$

vagy

(b) $$140° - \varphi + \varphi - 60° = 180°.$$

Az (a) esetből $\varphi = 100°$ adódik, a (b) viszont lehetetlen eredményre vezet, ezért csakis $\varphi = 100°$ lehetséges.

(1 pont)

Mivel a BMC háromszögben $BMC\sphericalangle + \varphi + BCM\sphericalangle = 180°$, így $\varphi = 100°$ és $BCM\sphericalangle = 20°$ miatt $BMC\sphericalangle = 60°$.
Ezzel a feladatot megoldottuk.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

5. Határozzuk meg azokat az x pozitív egész számokat, amelyekre az $E(x) = x^2 + 2x - (2x+1)\sqrt{x+1}$ kifejezés értéke négyzetszám.

dr. Molnár István, Gyula

1. megoldás:

Figyelembe véve, hogy az x pozitív egész, a $\sqrt{x+1}$ szintén (pozitív) egész kell legyen ahhoz, hogy az $E(x)$ egész szám legyen. A kifejezés mindkét oldalát 4-gyel szorozva

$$4 \cdot E(x) = 4x^2 + 8x - 4(2x+1)\sqrt{x+1}\,.$$

(1 pont)

Megfelelően csoportosítva: $4 \cdot E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4(2x+1)\sqrt{x+1} + 4x + 4 - 5$, illetve

$$4 \cdot E(x) = (2x+1)^2 - 4(2x+1)\sqrt{x+1} + 4\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 5\,,$$

valamint

$$4 \cdot E(x) = \left(2x + 1 - 2\sqrt{x+1}\right)^2 - 5\,.$$

(1 pont)

Legyen $E(x) = k^2,\ (k \in Z^+)$ és $2x + 1 - 2\sqrt{x+1} = t,\ (t \in Z)$.
Így $4k^2 = t^2 - 5$, melyet átrendezve $t^2 - 4k^2 = 5$, ahonnan $(t-2k)(t+2k) = 5$.

(2 pont)

Figyelembe véve, hogy a feltételek miatt egyrészt $t - 2k < t + 2k$, másrészt pedig $t - 2k$ és $t + 2k$ egész számok, két esetet különböztetünk meg:

I. $\begin{cases} t - 2k = -5 \\ t + 2k = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ k = 1\,. \end{cases}$

(1 pont)

Ekkor $2x + 1 - 2\sqrt{x+1} = -3$, melyet átrendezve a $2x + 4 = 2\sqrt{x+1}$ egyenletet kapjuk. Négyzetre emelés, rendezés és összevonás után az $x^2 + 3x + 3 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, melynek nincs valós megoldása, mert a diszkriminánsa negatív.

(1 pont)

II. $\begin{cases} t - 2k = 1 \\ t + 2k = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ k = 1\,. \end{cases}$

(1 pont)

Ekkor $2x + 1 - 2\sqrt{x+1} = 3$, melyet átrendezve a $2x - 2 = 2\sqrt{x+1}$ egyenletet kapjuk. Négyzetre emelés, majd rendezés és összevonás után az $x^2 - 3x = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, ahonnan $x = 3$, illetve $x = 0$. Ez utóbbi, figyelembe véve, hogy az x pozitív egész szám kell legyen, nem ad megoldást.

(1 pont)

Behelyettesítve: $E(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - (2 \cdot 3 + 1) \cdot \sqrt{3+1} = 9 + 6 - 14 = 1^2$
Tehát egyetlen olyan x pozitív egész szám van, amelyre az $E(x)$ négyzetszám lesz, éspedig az $x = 3$.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

2. megoldás:

Figyelembe véve, hogy az x pozitív egész, a $\sqrt{x+1}$ szintén (pozitív) egész kell legyen ahhoz, hogy az $E(x)$ egész szám legyen. *(1 pont)*

Legyen $\sqrt{x+1}=t$. Innen $x=t^2-1$, ahol *t* pozitív egész szám. Így

$$E(t)=(t^2-1)^2+2(t^2-1)-(2t^2-2+1)t\,.$$

A zárójelek felbontása és összevonás után kapjuk, hogy

$$E(t)=t^4-2t^3+t-1=t^4-2t^3+t^2-t^2+t-1=(t^2-t)^2-(t^2-t)-1.$$

(2 pont)

Legyen $E(t)=k^2,\ (k\in Z^+)$. Ebből következik, hogy

$$k^2=(t^2-t)^2-(t^2-t)-1\,,$$

oldal 4-gyel való szorzása után

$$4k^2=4(t^2-t)^2-4(t^2-t)-4=4(t^2-t)^2-4(t^2-t)+1-5=(2t^2-2t-1)^2-5\,,$$

melyet átrendezve

$$(2t^2-2t-1)^2-(2k)^2=5\,,$$

ahonnan $(2t^2-2t-1-2k)(2t^2-2t-1+2k)=5$. *(2 pont)*

Figyelembe véve, hogy egyfelől $2t^2-2t-1-2k<2t^2-2t-1+2k$, másrészt pedig $2t^2-2t-1-2k$ és $2t^2-2t-1+2k$ egész számok, két esetet különböztetünk meg:

I. $\begin{cases}2t^2-2t-1-2k=-5\\2t^2-2t-1+2k=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t^2-2t-1=-3\\k=1\,.\end{cases}$

(1 pont)

Ekkor $2t^2-2t-1=-3$, ezt átrendezve a $2t^2-2t+2=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, melynek nincs valós megoldása.

II. $\begin{cases}2t^2-2t-1-2k=1\\2t^2-2t-1+2k=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t^2-2t-1=3\\k=1\,.\end{cases}$

(1 pont)

Ekkor $2t^2-2t-1=3$, melyet átrendezve a $2t^2-2t-4=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, ahonnan $t=2$, illetve $t=-1$. Ez utóbbi, figyelembe véve, hogy a t pozitív egész szám kell legyen, nem ad megoldást. Így $\sqrt{x+1}=t=2$, ahonnan $x=3$. *(1 pont)*

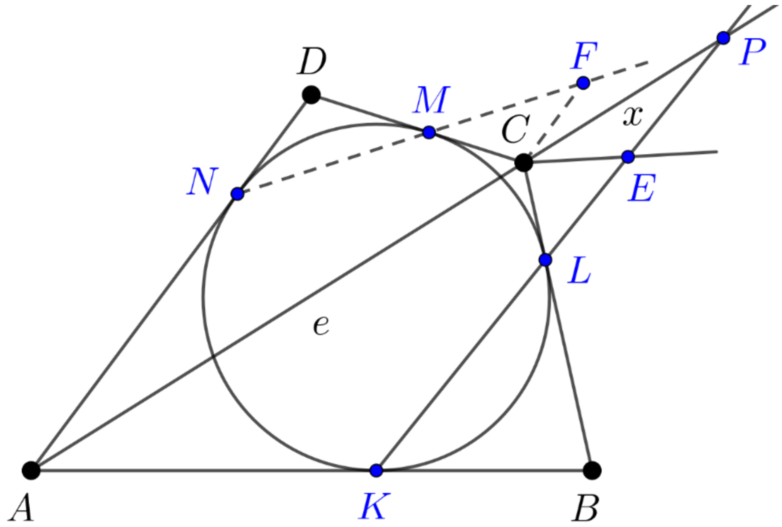
Behelyettesítve: $E(3)=3^2+2\cdot3-(2\cdot3+1)\cdot\sqrt{3+1}=9+6-14=1^2$.
Tehát egyetlen olyan *x* pozitív egész szám van, amelyre az $E(x)$ négyzetszám lesz, éspedig az $x=3$. *(1 pont)*

Összesen: 9 pont

6. Az $ABCD$ konvex érintőnégyszög oldalai különböző hosszúságúak. A négyszögbe írt kör az AB, BC, CD, DA oldalakat rendre a K, L, M, N pontokban érinti. Mutassuk meg, hogy a KL és NM egyenesek az AC átló egyenesén metszik egymást.

dr. Katz Sándor, Bonyhád

1. megoldás:
Tekintsük az alábbi ábrát.



1. ábra

Az oldalak különböző hosszúságúak, ezért feltételezhetjük, hogy $AB > BC$. Ekkor $CD < DA$, mert érintőnégyszögben $AB + CD = BC + DA$.

(1 pont)

Legyen E a KL egyenes azon pontja, amelyre $CE \parallel AB$. Mivel $CE \parallel KB$, ezért a BLK és CLE háromszögek szögei megegyeznek, így ezek a háromszögek hasonlók.

(1 pont)

Az érintőszakaszok hosszának egyenlősége miatt $BK = BL$, vagyis a BLK háromszög egyenlő szárú, ezért a CLE háromszög is egyenlő szárú, tehát $CL = CE$.

(1 pont)

A $BK = BL$ miatt, és mivel feltételeztük, hogy $AB > BC$, így $LC < AK$ és $CE < AK$.
Ezért KL és AC nem lehet párhuzamos, metszéspontjuk legyen P (eszerint P az AC átló C-n túli meghosszabbításán van).

(1 pont)

Így a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint

$$\frac{PC}{PA} = \frac{CE}{AK} = \frac{CL}{AK}.$$

(1 pont)

Legyen NM és AC metszéspontja Q. Konstruáljuk az NM egyenesen az F pontot úgy, hogy $CF \parallel AD$ legyen. Ekkor az fentiekhez teljesen hasonló módon belátható, hogy egyrészt Q is az AC átló C-n túli meghosszabbításán van, illetve

$$\frac{QC}{QA} = \frac{CF}{AN} = \frac{CM}{AN},$$

hiszen CFM is egyenlő szárú háromszög, ugyanakkor $CF = CM$ és $AK = AN$, valamint $CM = CL$ ezért

$$\frac{PC}{PA} = \frac{QC}{QA}.$$

(2 pont)

Legyen az AC átló hossza e, és $PC = x$, illetve $QC = y$.
Ekkor

$$\frac{x}{e+x} = \frac{y}{e+y},$$

amelyből $ex + xy = ey + xy$, így pedig $ex = ey$, és mivel $e \neq 0$, ezért $x = y$.
Eszerint a KL és NM egyenesek valóban az AC átló egyenesén metszik egymást.

(2 pont)

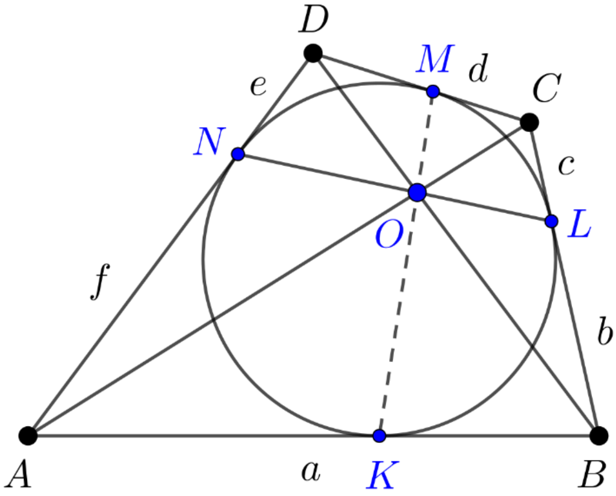
Összesen: 9 pont

Megjegyzés:
Ugyanígy belátható, hogy $AB < BC$ esetén a KL és NM az AC átló A-n túli meghosszabbításán metszik egymást.

2. megoldás:
A Brianchon-tétel kimondja, hogy ha az $ABCDEF$ hatszög oldalai egy nem elfajuló kúpszelet érintői, akkor a hatszög szemben fekvő szögpontjait összekötő egyenesek egy ponton mennek át, ez a hatszög Brianchon-pontja (nem elfajuló kúpszeleten kört, ellipszist, hiperbolát vagy parabolát értünk, a hatszögnél megengedjük, hogy az esetleg hurkolt legyen, továbbá a hatszög szomszédos oldalai egy egyenesbe is eshetnek).

(1 pont)

Alkalmazzuk először a Brianchon-tételt arra az esetre, amikor az érintőhatszög két-két oldala egy egyenesbe esik. Legyen a hatszög oldalai $AB = a, BL = b,\ LC = c,\ CD = d,\ DN = e,\ NA = f$, itt tehát a b, c és e, f oldalak egyenese azonos (2. ábra).

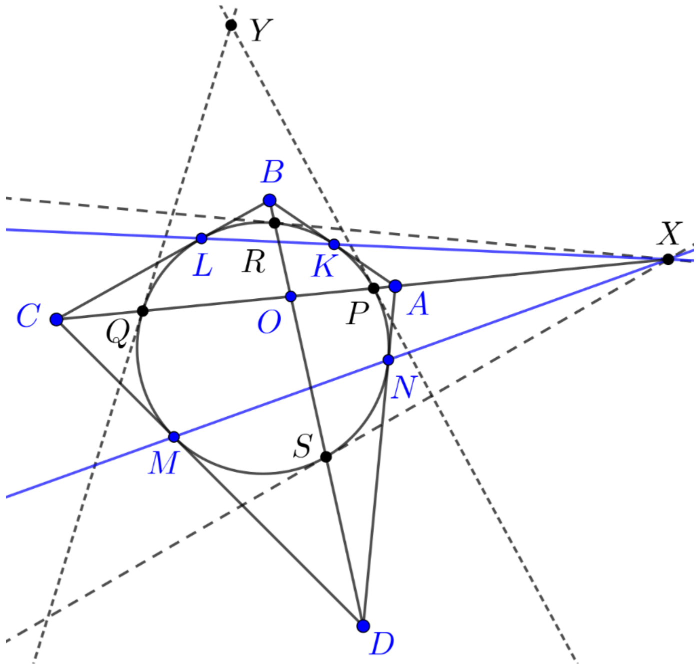


2. ábra

Ekkor a Brianchon-tétel szerint a szemben levő A, C illetve B, D valamint L, N szögpontokat összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást, ez az ábrán az O Brianchon-pont. Könnyen belátható, hogy ezen a ponton a KM egyenes is áthalad. Ez azt is jelenti, hogy az érintőnégyszög átlóinak metszéspontja illeszkedik a szemközti érintési pontokat összekötő mindkét egyenesre.

(2 pont)

Legyen a BD illetve AC egyenesnek a beírt körre vonatkozó pólusa X illetve Y. Az X pont polárisa, vagyis a BD egyenes azokat az Z pontokat tartalmazza, amelyekre az XZ átmérőjű kör merőlegesen metszi az $ABCD$ érintőnégyszög beírt körét, ekkor X és Z egymás konjugáltjai, és hasonlóképpen mondhatjuk, hogy az AC egyenes olyan W pontokat tartalmaz, amelyre Y és W egymás konjugáltjai. Tekintsük a 3. ábrát.



3. ábra

Messe a beírt kör az AC illetve BD átlót a P, Q illetve R, S pontokban. Ismert, hogy az R, S pontokban a beírt körhöz rajzolt érintők metszéspontja éppen X, a P, Q pontokban szerkesztett érintők metszéspontja pedig Y, mivel Y polárisa az O Brianchon-pontra is illeszkedő $APQC$ egyenes, az X polárisa pedig az O pontra ugyancsak illeszkedő $BRSD$ egyenes.

(2 pont)

Az AC és BD egyenesek konjugáltak, azaz átmennek egymás pólusán, tehát az X az AC, az Y pedig a BD egyenesre illeszkedik.

(1 pont)

A B illetve D pont polárisa a KL illetve MN egyenes, viszont egy ismert projektív geometriai tétel (*Hajós György: Bevezetés a geometriába, 472. oldal*) szerint a B, D pontok polárisai tartalmazzák a BD egyenes és a beírt kör R, S metszéspontjaiban a beírt körhöz húzott érintők metszéspontját, vagyis az előzőek szerint az X pontot.

(2 pont)

Tehát a KL, MN, AC egyenesek mindegyike áthalad az X ponton, ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

Megjegyzés:
Hasonlóképpen igazolható, hogy KN, LM, BD egyenesek áthaladnak az Y ponton.