10. ÉVFOLYAM – JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy számsorozat tagjaira teljesül, hogy bármely tagjához hozzáadva a rákövetkező tag reciprokát, eredményül 1-et kapunk. Ha tudjuk, hogy a számsorozat első 2024 tagjának szorzata 2, akkor mennyi a sorozat 2025. tagja?

dr. Péics Hajnalka, Szabadka

***1. megoldás*:**
Jelölje x a sorozat első tagját, y pedig a sorozat második tagját.
Ekkor teljesül, hogy $x+\frac{1}{y}=1$, ahonnan $y=\frac{1}{1-x}$. $(x\neq 1)$

(1 pont)

Legyen z a sorozat harmadik tagja.
Ekkor $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{z}=1$, ahonnan $\frac{1}{z}=1-\frac{1}{1-x}=-\frac{x}{1-x}$, azaz $z=\frac{x-1}{x}$. $(x\neq 0)$

(1 pont)

Legyen w a sorozat negyedik tagja.
Ekkor $\frac{x-1}{x}+\frac{1}{w}=1$, ahonnan $\frac{1}{w}=1-\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x}$, vagyis $w=x$.

(1 pont)

Tehát a sorozat negyedik tagja egyenlő a sorozat első tagjával, vagyis a fentiek figyelembevételével számsorozat periodikus, ahol egy periódus három hosszúságú:

$$x,\frac{1}{1-x},\frac{x-1}{x},x,\frac{1}{1-x},\frac{x-1}{x},x,\ldots$$

(1 pont)

Mivel $2024=2022+2=674\cdot 3+2$,

(1 pont)

továbbá $x\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-1}{x}=-1$,

(1 pont)

így belátható, hogy az első 2022 tag szorzata $(-1)^{674}=1$.

(1 pont)

Tudjuk, hogy az első 2024 tag szorzata 2, ahonnan adódik, hogy
$x\cdot\frac{1}{1-x}=2$, így $x=2-2x$, vagyis $x=\frac{2}{3}$.

(1 pont)

Mivel $2025=3\cdot 675$, ezért a sorozat 2025. tagja egyenlő a harmadik taggal, ami
$\frac{x-1}{x}=\frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}$.
Tehát, az adott számsorozat 2025. tagja $-\frac{1}{2}$.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

***2. megoldás*:**

Legyen $\{a_n\}$ az adott sorozat. A feladat feltételei alapján: $a_k + \frac{1}{a_{k+1}} = 1$, ahol k pozitív egész szám. Egyszerűen belátható, hogy bármely k esetén $a_k \neq 0$ és $a_k \neq 1$.

(1 pont)

Mivel $a_k + \frac{1}{a_{k+1}} = 1 \Big| \cdot \frac{1}{a_k}$, ahonnan

(1) $\quad 1 + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{a_k}$

(1 pont)

Az (1) összefüggés minden k esetén teljesül, így, ha k helyére $k+1$ kerül, akkor is igaz állítást kapunk, azaz $1 + \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{1}{a_{k+1}}$.

Így $1 + \frac{1}{a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{1}{a_{k+1}} \Big| \cdot \frac{1}{a_k}$, ahonnan

(2) $\quad \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}}$

(1 pont)

Az (1) és (2) összefüggések alapján

$\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - 1$, ahonnan

(1 pont)

$\frac{1}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = -1$, azaz $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} = -1$, azaz a számsorozat bármely három egymást követő tagjának szorzata -1.

(1 pont)

Mivel $2024 = 2022 + 2 = 674 \cdot 3 + 2$,

(1 pont)

így belátható, hogy az első 2022 tag szorzata $(-1)^{674} = 1$.

(1 pont)

Tudjuk, hogy az első 2024 tag szorzata 2, ahonnan egyfelől adódik, hogy
$a_{2023} \cdot a_{2024} = 2$, másrészt pedig $a_{2023} \cdot a_{2024} \cdot a_{2025} = -1$, így

(1 pont)

$a_{2025} = -\frac{1}{2}$ lesz.
Tehát, az adott számsorozat 2025. tagja $-\frac{1}{2}$.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

2. Legyenek az x és y olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $[x]+[y]=1$.

a) Igazoljuk, hogy $2 \leq [x^2]+[x^2+y^2]+[y^2] \leq 7$.

b) Adjunk példát olyan $(x; y)$ valós számpárokra, amelyekre pontosan az alsó, illetve a felső korlát adódik.

($[z]$ a z valós szám egész részét jelenti.)

dr. Bencze Mihály, Brassó

***Megoldás*:**

a) Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $x \leq y$. Az $[x]+[y]=1$ feltételből így azonnal következik, hogy

$$[x]=0, \quad [y]=1\,.$$

(1 pont)

Ez az x és y esetében azt jelenti, hogy

$$0 \leq x < 1 \text{ és } 1 \leq y < 2.$$

(1 pont)

Ha most ezekre a számokra tekintjük a négyzeteik egész részét, akkor
$0 \leq x^2 < 1$ alapján $[x^2]=0$, továbbá az $1 \leq y^2 < 4$ alapján pedig $1 \leq [y^2] \leq 3$.

(1 pont)

A két négyzet összegére
$1 \leq x^2+y^2 < 5$, vagyis az egész részre $1 \leq [x^2+y^2] \leq 4$ teljesül.

(1 pont)

A három becslés összevetéséből:
$[x^2]+[x^2+y^2]+[y^2] \geq 0+1+1=2$, illetve
$[x^2]+[x^2+y^2]+[y^2] \leq 0+4+3=7$.

(2 pont)

b) Az alsó becslés azonnal adódik, például az $x=0,\ y=1$ választással.

(1 pont)

A felső becsléshez olyan y-t választunk, amelynek négyzete nagyobb 3-nál, pl. $y=1{,}8$. Így elértük, hogy $[y^2]=3$. A továbbiakban az x választásánál csak arra kell figyelni, hogy olyan 1-nél kisebb szám legyen, amelynek a négyzete legalább $4-1,8^2=0{,}76$. Tehát megfelelő választás lehet például az $x=0{,}9;\ y=1{,}8$.

(2 pont)

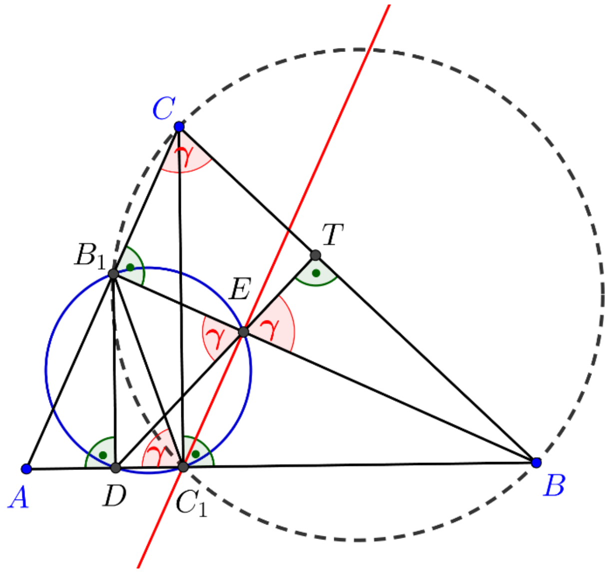
Összesen: 9 pont

3. A hegyesszögű ABC háromszögben a B és C csúcsból bocsátott magasságok talppontja rendre B_1 és C_1. Jelöljük D-vel a B_1-en áthaladó az AB-re merőleges talppontját, illetve a D-ből a BC-re állított merőleges egyenes és a BB_1 metszéspontja legyen E. Igazoljuk, hogy a C_1E egyenes párhuzamos az AC egyenessel.

Szabó Magda, Szabadka

***Megoldás*:**
Jelöljük a háromszög szögeit a szokásos módon. A D pontból a BC-re állított merőleges talppontja legyen T. Készítsünk ábrát, amely tartalmazza a megfelelő jelöléseket.

(1 pont)



A B_1 és C_1 pontok a BC szakasz Thalész-körének pontjai, tehát a BCB_1C_1 négyszög egy húrnégyszög, ezért a négyszög C_1-hez tartozó külső szöge megegyezik a szemközti belső szöggel, azaz $AC_1B_1\sphericalangle = B_1CB\sphericalangle = \gamma$.

(1 pont)

Az E pontot úgy állítottuk elő, hogy a D pontból a BC egyenesre merőlegest állítottunk, ezért $TEB\sphericalangle = 90° - EBC\sphericalangle = 90° - (90° - \gamma) = \gamma$ és $DEB_1\sphericalangle = TEB\sphericalangle$ (csúcsszögek).

(2 pont)

Mindezek alapján a $DC_1B_1\sphericalangle = DEB_1\sphericalangle = \gamma$, azaz a B_1D szakasz a C_1 és E pontokból γ szög alatt látszik, tehát a DC_1EB_1 négyszög egy húrnégyszög.

(2 pont)

Ebben a négyszögben $B_1DC_1\sphericalangle = 90°$, így a szemközti szög, B_1EC_1 is derékszög lesz.

(2 pont)

Ez éppen azt jelenti, hogy a C_1E merőleges a BB_1 magasságvonalra, ahogyan az AC egyenes is, tehát a C_1E egyenes párhuzamos az AC egyenessel.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

4. A Kerekerdő közepén lovagok élnek, közülük a leghíresebb Behemót. Bármely két lovag vagy barátja, vagy ellensége egymásnak. A lovagok valamennyien felesküdtek rá, és be is tartják a Kerekerdő Lovagjainak legfontosabb törvényét: „A barátom ellensége az én ellenségem is egyben.”. Mindegyik lovagnak pontosan 4 ellensége van. Hány lovag élhet a Kerekerdő közepén? (A kapcsolatokat kölcsönösnek tekintjük.)

Erdős Gábor, Nagykanizsa; Fedorszki Ádám, Kárpátalja

***1. megoldás*:**
Felhasználjuk, hogy a legfontosabb törvény miatt az ellenségem barátja az én ellenségem is egyben, mert ha barátom lenne, akkor e barátomnak rajtam keresztül az én ellenségem neki is ellensége lenne. Így bármely lovagnak legfeljebb 3 barátja lehet.

(1 pont)

Ugyanis, ha például az A lovagnak lenne legalább 4 barátja, akkor bármelyik ellenségének, például B-nek A-n kívül az A 4 barátja is ellensége lenne, így B-nek legalább 5 ellensége lenne, ami ellentmondás.

(1 pont)

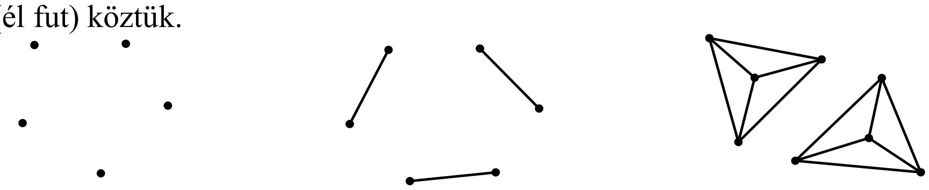
Egyfelől bármely lovagnak maximum 3 barátja és 4 ellensége lehet, így a lovagok száma nem lehet nagyobb 8-nál.

(1 pont)

Másrészt bármely lovagnak pontosan 4 ellensége van, így a lovagok száma legalább 5.

(1 pont)

Az alábbi ábrákon látható, hogyan adható konstrukció azokban az esetekben, ha a lovagok száma 5, 6 vagy 8. Az ábrákban (gráfokban) a lovagokat pontok jelölik, és ha két lovag barát, akkor összekötő szakasz van (él fut) köztük.

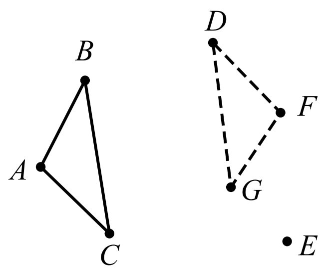


(2 pont)

A továbbiakban belátjuk, hogy a lovagok száma nem lehet 7.

(1 pont)

Tegyük fel, hogy a lovagok száma 7.
Legyenek a lovagok A, B, C, D, E, F, G. Az A-nak 4 ellensége van, legyenek ezek D, E, F, G, ekkor B és C barátai A-nak. De így B és C barátok, hiszen, ha B ellensége lenne C-nek, akkor B-nek ellensége lenne A is. (A barátok mindig teljes gráf-komponenst alkotnak a gráfban.)
Ezután nézzük például D-t. D-nek van már három ellensége (A, B, C), ezen kívül már csak egy ellensége lehet. Legyen ez az ellenség E. De akkor D-nek F és G barátai, tehát D, F, G barátok. Ekkor viszont E-nek mindenki ellensége, ami nem lehetséges.



(2 pont)

Összesen: 9 pont

***2. megoldás*:**
Ha Behemótnak vannak barátai, akkor az ő barátai egymás között páronként is csak barátok lehetnek.
(1 pont)

Ellenségek nem lehetnek, ugyanis a legfontosabb törvény miatt Behemót barátainak ellensége Behemótnak is ellensége lenne.

(1 pont)

Szemléltessük egy gráffal a Kerekerdő lovagjait, ahol a pontok a lovagokat jelölik, és ha két lovag barát, akkor él fut közöttük. Ez azt jelenti, hogy a gráf csak olyan komponensekből állhat, amelyek teljes gráfok.

(1 pont)

Ha a lovagok száma n ($n \geq 5$, n egész szám), akkor például Behemótnak pontosan 4 ellensége van, így barátainak száma $n-5$ lehet csak.

(1 pont)

Vagyis Behemót baráti társasága, és minden további baráti társaság $n-4$ lovagból áll.
(1 pont)

Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az $n-4$ osztója legyen az n-nek, ahol $n-4 \geq 0$ egész szám.

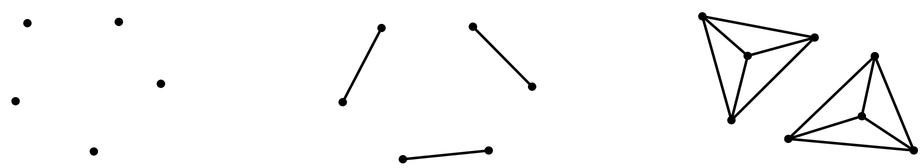
$$\frac{n}{n-4} = \frac{n-4+4}{n-4} = 1 + \frac{4}{n-4},$$

ami akkor egész, ha $n-4$ osztója 4-nek.

(1 pont)

Tehát, ha a lovagok száma 5, 6 vagy 8, akkor teljesülnek a feladat feltételei.
(1 pont)

A gráf $\frac{n}{n-4}$ darab $n-4$ csúcsú teljes gráf komponensből áll. Ilyen konstrukciók a következők:



(2 pont)

Összesen: 9 pont

***3. megoldás*:**
Bármely lovagnak pontosan 4 ellensége van, így a lovagok száma legalább 5.

(1 pont)

Szemléltessük egy gráffal a Kerekerdő lovagjait, ahol pontok jelölik a lovagokat, és ha két lovag barát, akkor él fut közöttük.

Ha Behemóttal együtt 5 lovag van a Kerekerdőben, akkor mivel mindegyiküknek pontosan 4 ellensége van, így mindegyikük barát nélküli.

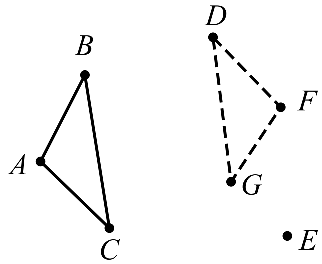
(1 pont)

Ha 6 lovag van a Kerekerdőben, akkor mindenkinek 1 barátja és 4 ellensége van, közös barát nem lehet, mert akkor valamelyik lovagnak 2 barátja lenne.

(1 pont)

A továbbiakban belátjuk, hogy a lovagok száma nem lehet 7.

(1 pont)



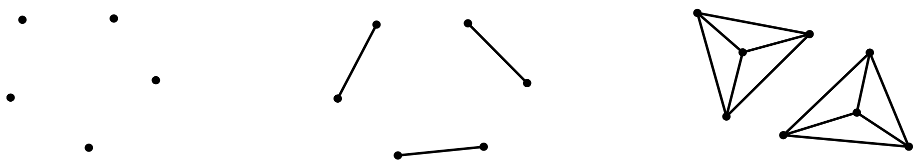
Tegyük fel, hogy a lovagok száma 7.
Legyenek a lovagok A, B, C, D, E, F, G. Az A-nak 4 ellensége van, legyenek ezek D, E, F, G, ekkor B és C barátai A-nak. De így B és C barátok, hiszen, ha B ellensége lenne C-nek, akkor B-nek ellensége lenne A is. (A barátok mindig teljes gráf-komponenst alkotnak a gráfban.)
Ezután nézzük például D-t. D-nek van már három ellensége (A, B, C), ezen kívül már csak egy ellensége lehet. Legyen ez az ellenség E. De akkor D-nek F és G barátai, tehát D, F, G barátok. Ekkor viszont E-nek mindenki ellensége, ami nem lehetséges.

(2 pont)

Ha a lovagok száma 8, akkor mindegyik lovagnak 3 barátja és 4 ellensége lehet, két-két 4 fős baráti társaságra bonthatók a lovagok.

(1 pont)

Az alábbi ábrákon látható, hogy adható konstrukció azokban az esetekben, ha a lovagok száma 5, 6 vagy 8.



A lovagok száma a Kerekerdőben 8-nál több nem lehet, mivel bármely lovagnak legfeljebb 3 barátja lehet. Ugyanis, ha például az A lovagnak legalább 4 barátja lenne, akkor bármelyik ellenségének, például B-nek, A-n kívül az A lovag 4 barátja is ellensége lenne, így B-nek legalább 5 ellensége lenne, ami ellentmondás.

(2 pont)

Összesen: 9 pont

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$x^2 + 4x - (2x + 3)\sqrt{x + 3} = 105$$

dr. Molnár István, Gyula

***1. megoldás*:**
A négyzetgyök értelmezhetősége alapján a feltétel: $x + 3 \geq 0$, azaz $x \geq -3$.
Legyen $\sqrt{x + 3} = t$. Innen $x = t^2 - 3$, ahol $t \geq 0$.
Így

$$(t^2 - 3)^2 + 4(t^2 - 3) - (2t^2 - 6 + 3)t = 105.$$

(2 pont)

A zárójelek felbontása, átrendezés és összevonás után kapjuk, hogy

$$t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 3t - 108 = 0$$
$$t^4 - 2t^3 + t^2 - 3t^2 + 3t - 108 = 0$$
$$(t^2 - t)^2 - 3(t^2 - t) - 108 = 0$$

Legyen $t^2 - t = y$, így az $y^2 - 3y - 108 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, melynek gyökei $y = -9$, illetve $y = 12$.

(2 pont)

Ha $y = -9$, akkor a $t^2 - t + 9 = 0$ egyenlet adódik, amelynek nincs valós megoldása.

(1 pont)

Ha $y = 12$, akkor a $t^2 - t - 12 = 0$ egyenletet kapjuk, ahonnan $t = 4$, illetve $t = -3$. Ez utóbbi, figyelembe véve, hogy $t \geq 0$, nem ad valós megoldást.

(2 pont)

Tehát $\sqrt{x + 3} = t = 4$, ahonnan $x = 13$, az egyetlen megoldás.

(1 pont)

Ellenőrzés:
Ha $x = 13$, akkor behelyettesítve kapjuk, hogy
$13^2 + 4 \cdot 13 - (2 \cdot 13 + 3) \cdot \sqrt{13 + 3} = 169 + 52 - 116 = 105$, azaz megoldás.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

***2. megoldás*:**

A négyzetgyök értelmezhetősége alapján a feltétel: $x+3 \geq 0$, azaz $x \geq -3$.

$$x^2+4x-(2x+3)\sqrt{x+3}=105 \;\Big|\; \cdot 4$$

$$4x^2+16x-4(2x+3)\sqrt{x+3}=420$$

Megfelelően csoportosítva

$$4x^2+12x+9-4(2x+3)\sqrt{x+3}+4x+12=441$$

$$(2x+3)^2-4(2x+3)\sqrt{x+3}+4\left(\sqrt{x+3}\right)^2=441$$

(2 pont)

$$\left(2x+3-2\sqrt{x+3}\right)^2=441, \text{ ahonnan } \left|2x+3-2\sqrt{x+3}\right|=21$$

(1 pont)

Figyelembe véve, hogy $2x+3-2\sqrt{x+3}=2(x+3)-2\sqrt{x+3}-3$, legyen $\sqrt{x+3}=t$, ahol $t \geq 0$.

Így a $|2t^2-2t-3|=21$ egyenlethez jutunk.

(1 pont)

Ha $2t^2-2t-3=-21$, akkor a $2t^2-2t+18=0$ egyenlet adódik, amelynek nincs valós megoldása.

(1 pont)

Ha $2t^2-2t-3=21$, akkor a $2t^2-2t-24=0$ egyenletet kapjuk, ahonnan $t=4$, illetve $t=-3$. Ez utóbbi, figyelembe véve, hogy $t \geq 0$, nem ad valós megoldást.

(2 pont)

Tehát $\sqrt{x+3}=t=4$, ahonnan $x=13$, az egyetlen megoldás.

(1 pont)

Ellenőrzés:
Ha $x=13$, akkor behelyettesítve kapjuk, hogy
$13^2+4\cdot 13-(2\cdot 13+3)\cdot\sqrt{13+3}=169+52-116=105$, azaz megoldás.

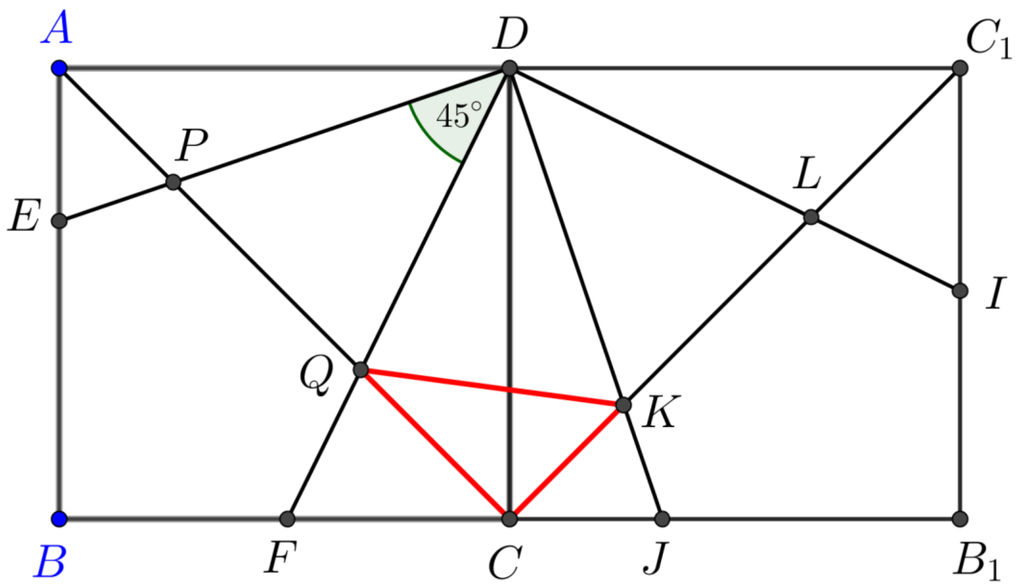
(1 pont)

Összesen: 9 pont

6. Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet AB oldalán az E, BC oldalán az F belső pontokat úgy vettük fel, hogy az $FDE\sphericalangle = 45°$ teljesül. Az AC átló az ED szakaszt a P, az FD szakaszt a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AP, PQ, QC szakaszokból derékszögű háromszög szerkeszthető.

Bíró Bálint, Eger

***1. megoldás*:**
Forgassuk el az $ABCD$ négyzetet a D pont körül $+90°$-kal.



(2 pont)

Az $ABCD$ négyzet „átmegy” a CB_1C_1D négyzetbe, így teljesülnek a következő egyenlőségek: $DE = DJ$, $DF = DI$, $AP = CK$, $PQ = KL$, $QC = LC_1$.

(1 pont)

Belátjuk, hogy a QCK háromszög derékszögű és oldalai éppen AP, PQ és QC nagyságúak.
A forgatás miatt AC merőleges CC_1-re, vagyis $QCK\sphericalangle = 90°$.

(2 pont)

A forgatás miatt $ADE\sphericalangle = CDJ\sphericalangle$,

(1 pont)

így $QDK\sphericalangle = FDC\sphericalangle + CDJ\sphericalangle = FDC\sphericalangle + ADE\sphericalangle = 45°$, hiszen „egymás mellé került” az egymást 45°-ra kiegészítő két szög. Így a QDK háromszög egybevágó a PDQ és KDL háromszögekkel, mert két-két oldaluk és az oldalak által közbezárt 45°-os szögeik megegyeznek.

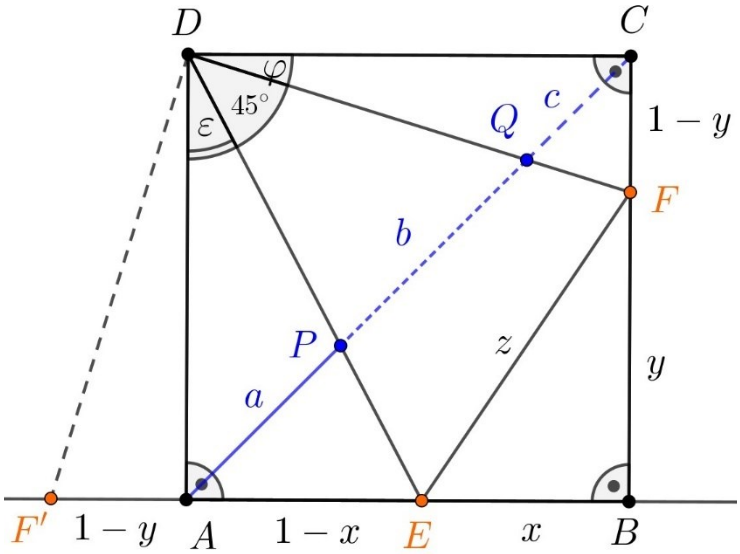
(2 pont)

Innen $PQ = QK$, tehát az AP, PQ és QC szakaszokból derékszögű háromszög szerkeszthető.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

***2. megoldás*:**
Elegendő azt bizonyítani, hogy az AP, PQ, QC szakaszok közül két szakasz hosszának négyzetösszege a harmadik hosszának négyzetével egyenlő.
Tekintsük az alábbi ábrát, amelyen az $EB = x$, $BF = y$, $EF = z$, $AP = a$, $PQ = b$, $QC = c$, továbbá az $EDA\sphericalangle = \varepsilon$, $CDF\sphericalangle = \varphi$ jelöléseket alkalmaztuk.



A választott jelölésekkel $AE = 1 - x,\ CF = 1 - y,\ AC = a + b + c = \sqrt{2}$, illetve $\varepsilon + \varphi = 45°$. Az ábrán megjelöltük a BA félegyenesen, az A ponton túl azt az F' pontot, amelyre $AF' = 1 - y$.

(1 pont)

Azt fogjuk igazolni, hogy $a^2 + c^2 = b^2$.
Ehhez először felírjuk az EBF derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt:

(1) $$x^2 + y^2 = z^2,$$

majd bizonyítjuk, hogy $x + y + z = 2$.
Belátható, hogy az FCD és $F'AD$ háromszögek egybevágók, mert $FC = F'A = 1 - y$, illetve $AD = CD = 1$, és a két-két oldaluk által közbezárt szögek nagysága 90°. Eszerint $ADF'\sphericalangle = \varphi$, de akkor $EDF'\sphericalangle = \varepsilon + \varphi = 45°$. Ebből azonnal következik, hogy az EFD és $EF'D$ egybevágó háromszögek, hiszen ED közös oldal, $FD = F'D$ és a két-két oldal által bezárt szög mindkét háromszögben 45°.
A két háromszög egybevágóságából $EF = EF'$, vagyis $z = 1 - x + 1 - y$, ahonnan adódik, hogy

(2) $$x + y + z = 2.$$

(1 pont)

Vegyük most észre, hogy a megfelelő szögek egyenlősége miatt az AEP és CDP háromszögek hasonlók, ezért a megfelelő oldalak aránya egyenlő, tehát $\frac{a}{\sqrt{2}-a} = \frac{1-x}{1}$, ahonnan

(3) $$a = \frac{\sqrt{2}(1-x)}{2-x}.$$

A megfelelő szögek egyenlősége miatt a CFQ és ADQ háromszögek is hasonlók, emiatt $\frac{c}{\sqrt{2}-c} = \frac{1-y}{1}$, ebből egyszerű átalakítás után

(4) $$c=\frac{\sqrt{2}(1-y)}{2-y}.$$

Felhasználva, hogy $a+b+c=\sqrt{2}$, következik, hogy

$$b=\sqrt{2}-a-c=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}(1-x)}{2-x}-\frac{\sqrt{2}(1-y)}{2-y},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és rendezés után adódik, hogy

$$b=\sqrt{2}\cdot\frac{x+y-xy}{(2-x)(2-y)}.$$

(2 pont)

Felhasználjuk még, hogy (1) és (2) alapján $x^2+y^2=(2-x-y)^2$, ahonnan egyszerű számolással adódik, hogy $xy=2x+2y-2$. Az így kapott és a (2) összefüggés alapján

$$x+y-xy=x+y-2x-2y+2=-x-y+2=z,$$

így

(5) $$b=\frac{\sqrt{2}z}{(2-x)(2-y)}.$$

A (3)-(4)-(5) összefüggések alapján

$$a^2=\frac{2(1-x)^2}{(2-x)^2};\quad c^2=\frac{2(1-y)^2}{(2-y)^2};\quad b^2=\frac{2z^2}{(2-x)^2\cdot(2-y)^2}.$$

(2 pont)

A felírt összefüggések alapján belátható, hogy elegendő megvizsgálni az a^2+c^2 törtkifejezésének számlálóját, hiszen a nevezője nyilvánvalóan $(2-x)^2\cdot(2-y)^2$, és ez azonos a b^2 nevezőjével. A törtek számlálóiban található 2-es szorzótényezők miatt elegendő azt vizsgálni, hogy teljesül-e az

$$[(1-x)(2-y)]^2+[(1-y)(2-x)]^2=z^2$$

egyenlőség.

Egyszerű számolással belátható, hogy az $xy=2x+2y-2$ összefüggés felhasználásával az

$$(1-x)(2-y)=y,\qquad (1-y)(2-x)=x,$$

adódnak.

(2 pont)

A kapott összefüggések alapján. figyelembe véve az (1) szerinti $x^2+y^2=z^2$ eredményt, belátható, hogy

$$[(1-x)(2-y)]^2+[(1-y)(2-x)]^2=y^2+x^2=z^2.$$

Mindezek alapján az $a^2+c^2=b^2$ valóban fennáll, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés:
Az (1) és (2) alapján felírt $x^2+y^2=(2-x-y)^2$ összefüggésből adódó $xy=2x+2y-2$ egyenlőség felhasználásával, más módon is belátható, hogy $a^2+c^2=b^2$.

A (3) és (4) összefüggések (a megfelelő háromszögek hasonlóságából), illetve az $a+b+c=\sqrt{2}$ alapján, egyfelől

$$1-x=\frac{a}{\sqrt{2}-a} \quad \to \quad x=1-\frac{a}{\sqrt{2}-a}=1-\frac{a}{b+c}=\frac{b+c-a}{b+c},$$

másrészt

$$1-y=\frac{c}{\sqrt{2}-c} \quad \to \quad y=1-\frac{c}{\sqrt{2}-c}=1-\frac{c}{b+a}=\frac{b+a-c}{b+a}.$$

A kapott eredményeket behelyettesítve az $xy=2x+2y-2$ összefüggésbe kapjuk, hogy

$$\frac{b+c-a}{b+c}\cdot\frac{b+a-c}{b+a}=2\cdot\frac{b+c-a}{b+c}+2\cdot\frac{b+a-c}{b+a}-2.$$

Közös nevezőre hozás, a műveletek elvégzése, majd az összevonások után a

$$b^2-a^2-c^2+2ac=2b^2+2ac-2a^2-2c^2$$

adódik, amiből átrendezés után, éppen a bizonyítandó $a^2+c^2=b^2$ összefüggést kapjuk meg.