1. Egy hajó 6 óra alatt ér le a folyón Budapestről Paksra, és 9 óra alatt ér vissza a folyón felfelé Paksról Budapestre. Mennyi idő alatt ér le egy tutaj Budapestről Paksra? (A hajó vízhez viszonyított sebessége a folyón lefelé és felfelé ugyanannyi, a tutaj sebessége pedig azonos a folyó sebességével.)

dr. Katz Sándor, Bonyhád

***Megoldás*:**
Számoljuk az időt órában.
Ha az út a folyón kilométerben mérve s, akkor lefelé $v_{le} = \frac{s}{6}$ (km/h), felfelé $v_{fel} = \frac{s}{9}$ (km/h) a hajó (parthoz viszonyított) sebessége.

(1 pont)

Jelölje a hajó vízhez viszonyított sebességét $v_{hajó}$, a folyó sebességét pedig $v_{folyó}$. Ekkor

$$v_{le} = v_{hajó} + v_{folyó} = \frac{s}{6},$$

(1 pont)

$$v_{fel} = v_{hajó} - v_{folyó} = \frac{s}{9}.$$

(1 pont)

A folyó sebességének meghatározásához vonjuk ki a két sebességet egymásból

$$v_{le} - v_{fel} = (v_{hajó} + v_{folyó}) - (v_{hajó} - v_{folyó}) = 2 \cdot v_{folyó}$$

(2 pont)

Innen a folyó sebessége

$$v_{folyó} = \frac{v_{le} - v_{fel}}{2} = \left(\frac{s}{6} - \frac{s}{9}\right) : 2 = \frac{s}{36}.$$

(2 pont)

A tutaj menetideje ezek alapján

$$t = \frac{s}{v_{folyó}} = \frac{s}{\frac{s}{36}} = 36.$$

(2 pont)

Tehát a tutaj 36 óra alatt ér Budapestről Paksra.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

2. Legyen az n olyan 6-nál nagyobb egész szám, amelyre az $n-1$ és az $n+1$ is prím. Bizonyítsuk be, hogy $n^2 \cdot (n^2+16)$ osztható 720-szal.

Erdős Gábor, Nagykanizsa

***Megoldás*:**
Mivel $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, és a 16, 9 és 5 páronként relatív prímek, ezért azt kell belátnunk, hogy $n^2 \cdot (n^2+16)$ osztható 16-tal, 9-cel és 5-tel is.

(1 pont)

Mivel az $n-1$ és $n+1$ ötnél nagyobb (páratlan) prímek, ezért egyikük sem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, amiből adódóan az n osztható 2-vel és 3-mal is.

(1 pont)

Ekkor egyrészt az n^2 és az n^2+16 is osztható 4-gyel, így szorzatuk osztható 16-tal,

(1 pont)

másrészt az n^2, és így az $n^2 \cdot (n^2+16)$ is osztható 9-cel.

(1 pont)

Az 5-tel való oszthatóság igazolása végett átalakítjuk a kifejezést:

$$n^2 \cdot (n^2+16) = n^4 + 16n^2 = n^4 - 4n^2 + 20n^2 = n^2 \cdot (n^2-4) + 20n^2.$$

(1 pont)

Mivel a $20n^2$ osztható 5-tel, így elegendő bizonyítanunk, hogy az $n^2 \cdot (n^2-4)$ osztható 5-tel.

(1 pont)

Az $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ öt egymást követő egész szám, így közülük (pontosan) egy biztosan osztható 5-tel.

(1 pont)

Mivel az $n-1$ és az $n+1$ is ötnél nagyobb prímek, ezért egyikük sem osztható 5-tel.

(1 pont)

Ebből adódik, hogy a másik három szám szorzata, azaz $n \cdot (n-2) \cdot (n+2) = n \cdot (n^2-4)$ osztható 5-tel.

(1 pont)

Ezzel az állítást beláttuk.

Összesen: 9 pont

3. Egy 7×7-es táblázatba beírtuk az $1, 2, \dots, 49$ számokat a bal felső mezőből indulva egymás után balról jobbra soronként fentről lefelé haladva. Egy 3×3 nagyságú négyzettel lefedünk 9 mezőt minden lehetséges módon. Hány esetben lesz a lefedett mezőkön a számok összege négyzetszám?

dr. Bálint Béla, Zsolna

***Megoldás*:**
Ha x jelöli a 3×3-as négyzettel lefedett rész középső mezőjében álló számot, akkor a lefedett számok $x-8$, $x-7$, $x-6$, $x-1$, x, $x+1$, $x+6$, $x+7$ és $x+8$ lesznek.

(2 pont)

Így a lefedett mezőkön a számok összege $9x$ lesz.

(2 pont)

Ez az összeg akkor és csak akkor lesz négyzetszám, ha az x is négyzetszám.

(1 pont)

Mivel az x nem lehet a táblázat „szélein” (azaz az első és utolsó sorokban, illetve oszlopokban), ezért az x lehetséges értékeire teljesül, hogy $9 \leq x \leq 41$.

(2 pont)

A fenti intervallumban csak a 9, 16, 25 és 36 négyzetszámok,

(1 pont)

de a 36 a táblázat első oszlopába „kerül”, így az nem ad megoldást, ezért három esetben lesz a lefedett mezőkön álló számok összege négyzetszám.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

4. Egy kerek asztal körül hat személy ül, A, B, C, D, E és F valamilyen körüljárás szerint ebben a sorrendben. Az asztal körül nincs több szék. Mind a hatan egyszerre fölállnak, és átülnek egy-egy másik székre úgy, hogy senki sem ül vissza az eredeti helyére, és senki sem ül az eredeti helyével szomszédos székre. Hányféleképpen ülhet át a hat személy a fenti feltételek betartásával? (Különbözőnek tekintünk két ülésrendet, ha legalább egy személy különböző széken ül.)

Béres Zoltán, Zenta

***Megoldás*:**
Az összeszámolni kívánt ülésrendeket nevezzük *megengedett* ülésrendeknek. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a székek az asztal körül egy szabályos hatszöget alkotnak. Jelöljük meg ezeket a helyeket: A személy ül az a széken, B a b széken, és így tovább, végül F személy ül az f széken. Megfigyelhetjük, hogy az A személy a c, d, e székekre ülhet át, azaz a hatszög adott csúcsából induló három átlója mentén ülhet át. Mind a hatan kizárólag az átlókat követve ülhetnek át.

(1 pont)

Nevezzünk két ülésrendet *átellenesnek*, ha az egyik ülésrendben mindegyik személy a helyével pontosan szemközti helyen ül a másik ülésrendhez képest. Belátható, hogy minden megengedett ülésrendnek létezik pontosan egy *átellenes* ülésrendje, és különböző ülésrendeknek különböző az *átellenes* ülésrendje.
Az is igaz, hogy minden olyan ülésrend, amelyben minden személy vagy a helyén marad, vagy valamelyik szomszédos székre ül át, egy *megengedett* ülésrendnek az *átellenes* ülésrendje.
A megengedett ülésrendek és a megengedett ülésrendek átellenes ülésrendjei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, ezért számuk megegyezik.

(1 pont)

Ezek alapján a továbbiakban tűzzük ki célul, hogy összeszámoljuk azokat az ülésrendeket, amelyeknél mindenki vagy a helyén maradt, vagy a szomszédos székre ült át.
Egy lehetséges ülésrend lehet, ha mindenki a helyén marad: $ABCDEF$.

(1 pont)

Ha az A személy átül a b székre, akkor a B két dolgot tehet: vagy átül az a székre, és így helyet cseréltek, vagy átül a c székre. Ez utóbbi esetben, ha mindenki eggyel arrébb ül, az a definíció szerint különböző ülésrendet jelent: $FABCDE$. Ugyanez a helyzet, ha az A a másik irányba „mozdul”, azaz az e székre ül. Ekkor is létrejöhet egy eltolódó sorrend: $BCDEFA$.

(1 pont)

Az előbbiek figyelembevételével elmondhatjuk, hogy minden átülés vagy valahány szomszédpár helycseréjéből áll (ez lehet 0 is, akkor, ha senki nem „mozdul”), vagy előáll az $FABCDE$ és a $BCDEFA$ sorrend valamelyike. Ez utóbbi két sorrendet nem tekintve számoljuk össze a többi lehetőséget.

(1 pont)

1. Nincs helyet cserélő pár.
   1 ilyen ülésrend van: $ABCDEF$.
2. Pontosan egy szomszédpár cserél helyet.
   Összesen **6** ilyen lehetőség van: $(BA)CDEF$, $A(CB)DEF$, $AB(DC)EF$, $ABC(ED)F$, $ABCD(FE)$, $F)BCDE(A$.

(1 pont)

3. Pontosan két szomszédpár cserél helyet.
   Ha egy párt kiválasztunk, akkor három másik választható ki mellé: például, ha az AB helyet cserél, akkor rajtuk kívül helyet cserélhet még a CD, DE és EF. Ez a fennmaradó öt párra is igaz, azaz az összes cserék száma így $6 \cdot 3 = 18$ lenne. Viszont, így minden lehetőséget kétszer számoltunk meg, ezért a hat személy közül **9** módon lehet két olyan párt kiválasztani, akik helyet cserélnek.

(1 pont)

4. Pontosan három pár cserél helyet.
   Összesen **2** ilyen lehetőség van: $(AB)(CD)(EF)$ vagy $A)(BC)(DE)(F$.

(1 pont)

Figyelembe véve az $FABCDE$ és a $BCDEFA$ sorrendeket is, valamint összegezve az 1.–4. esetekben összeszámolt lehetőségeket, azt kapjuk, hogy $2 + 1 + 6 + 9 + 2 = 20$ lehetséges ülésrend létezik.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

Megjegyzés:
Az összes lehetséges ültetés:

$CDEFAB, CEAFBD, CEFABD, CEFBAD, CFEABD, CFEBAD, DEAFBC, DEAFCB, DEFABC, DEFACB, DEFBAC, DFEABC, DFEACB, DFEBAC, EDAFBC, EDAFCB, EDFABC, EDFACB, EDFBAC, EFABCD$

5. Egy osztály mindegyik tanulója úszik vagy kosarazik, esetleg mindkét sportot űzi. Lehetséges-e, hogy az osztályban több a lány, mint a fiú, ha tudjuk, hogy

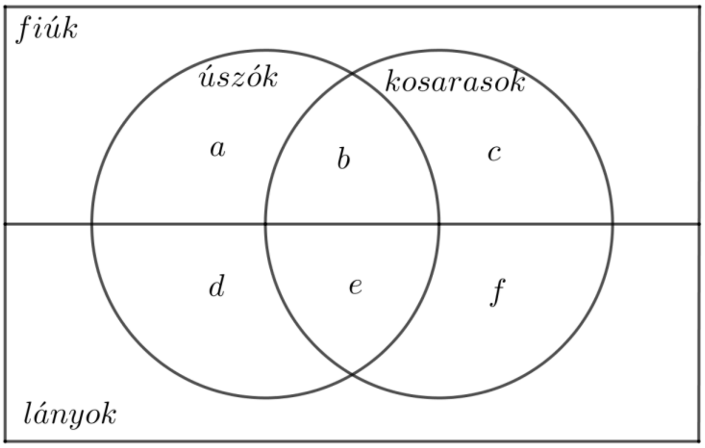
a) az úszóknak és a kosarasoknak is 60%-a fiú;

b) az úszóknak 60%-a, a kosarasoknak 75%-a fiú?

dr. Katz Sándor, Bonyhád

***Megoldás*:**

Az alábbi halmazábra jelöléseit használjuk a megfelelő csoportba tartozó tanulók számának jelölésére, ahol az a, b, c, d, e és f nemnegatív egész számok.



(1 pont)

a) A feltételek: $a + b = 0{,}6 \cdot (a + b + d + e)$ és $b + c = 0{,}6 \cdot (b + c + e + f)$.
Átrendezések és összevonások után kapjuk, hogy

$$2a + 2b = 3d + 3e \text{ és } 2b + 2c = 3e + 3f.$$

(1 pont)

Mivel az úszóknak és a kosarazóknak is nagyobb része fiú, ezért úgy lehetne az osztályban több lány, mint fiú, ha a fiúk (mindegyike vagy többsége) mindkét sportot űzné, a lányok pedig csak az egyiket. Ennek elérése érdekében, legyen például $a = c = e = 0$.

(1 pont)

Ekkor $2b = 3d = 3f$. Ezek az értékek megválaszthatók úgy, hogy $b < d + f$ legyen. Ha figyelembe vesszük, hogy egy osztály tanulóiról van szó, akkor például a $b = 15$, $d = f = 10$ választás megfelelő, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben lehetséges, hogy több lány van az osztályban, mint fiú (adott esetben 15 fiú és 20 lány).

(1 pont)

b) Ebben az esetben a feltételek: $a + b = 0{,}6 \cdot (a + b + d + e)$ és $b + c = 0{,}75 \cdot (b + c + e + f)$.

(1 pont)

Megfelelő átalakítások után kapjuk, hogy

(1) $2a + 2b = 3d + 3e$;

(2) $b + c = 3e + 3f$.

(1 pont)

A kérdés az, hogy a kapott feltételek figyelembevételével lehetséges-e az, hogy
(3) $d + e + f > a + b + c$.

(1 pont)

A továbbiakban indirekt módon bizonyítjuk, hogy ez nem lehetséges.
Tegyük fel, hogy a (3) igaz, és szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát 3-mal.
(4) $3d + 3e + 3f > 3a + 3b + 3c$
Adjuk össze (1), (2) és (4) megfelelő oldalait.

$$2a + 3b + c + 3d + 3e + 3f > 3a + 3b + 3c + 3d + 6e + 3f$$

(1 pont)

A kapott egyenlőtlenség bal oldalát 0-ra redukálva a $0 > a + 2c + 3e$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami a kezdeti feltételek figyelembevételével nyilvánvalóan nem teljesülhet.

(1 pont)

Összesen: 9 pont

Megjegyzés:
Egy lehetséges második megoldás a feladat b) részére.
b) Ebben az esetben a feltételek: $a + b = 0{,}6 \cdot (a + b + d + e)$ és $b + c = 0{,}75 \cdot (b + c + e + f)$.

(1 pont)

Megfelelő átalakítások után kapjuk, hogy
(1) $2a + 2b = 3d + 3e$;
(2) $b + c = 3e + 3f$.

(1 pont)

(1)-ből a bal oldalt $2c$-vel növelve kapjuk: $2a + 2b + 2c \geq 2a + 2b = 3d + 3e$.
(2)-ből a bal oldalt a-val növelve kapjuk: $a + b + c \geq b + c = 3e + 3f$.
Triviálisan teljesül, hogy $3e \geq 0$.

(1 pont)

Adjuk össze az így kapott három egyenlőtlenség megfelelő oldalait:

$$3a + 3b + 3c + 3e \geq 3d + 6e + 3f$$

(1 pont)

Innen egyszerű átalakítások után adódik, hogy

$$a + b + c \geq d + e + f,$$

azaz a fiúk száma nem lehet kisebb a lányokénál.

(1 pont)

Egyenlő lehet, de csak akkor, ha a felírt három egyenlőtlenség mindegyikében egyenlőség áll fenn, azaz $a = c = e = 0$ lesz, és így a $2b = 3d$, valamint a $b = 3f$ feltételeknek kell teljesülniük.

6. Az $ABCD$ négyzet BC oldalán vegyük fel az E belső pontot és rajzoljuk meg az $AFGE$ négyzetet úgy, hogy a két négyzet körüljárási iránya azonos legyen. Ezután rajzoljuk meg a $BHKE$ négyzetet úgy, hogy ennek a körüljárási iránya megegyezzen az előző két négyzet körüljárási irányával. Jelöljük O-val a $BHKE$ négyzet középpontját. Bizonyítsuk be, hogy az ODF háromszög $BHKE$ négyzettel nem közös részének területe az $ABCD$ négyzet területével egyenlő.

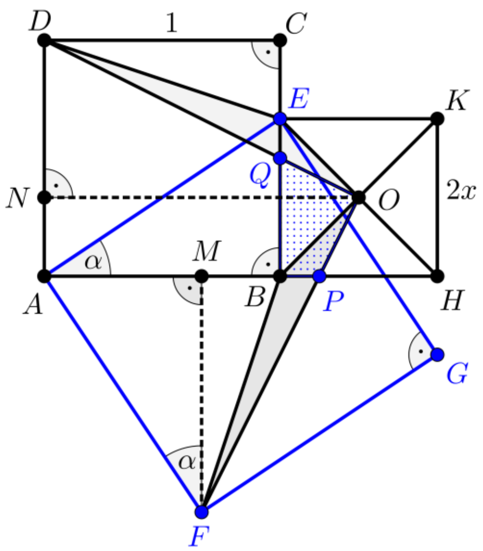
Bíró Bálint, Eger

Megoldás:

Válasszuk a feladatban szereplő mindhárom négyzet körüljárási irányát pozitívnak, továbbá legyen (az egyszerűség kedvéért) az $ABCD$ négyzet egységnyi oldalhosszúságú, a $BHKE$ négyzet oldalhossza pedig legyen $2x$. A feltételek alapján nyilván $2x < 1$.

Tekintsük az alábbi ábrát, amelyen az OF és BH metszéspontja P, az OD és BC metszéspontja Q. Legyen O-ból az AD-re, illetve F-ből az AB-re bocsátott merőlegesek talppontja rendre N, illetve M.

(1 pont)



Ha $EAB\sphericalangle = \alpha$, akkor $BAF\sphericalangle = 90° - \alpha$, és így az AFM derékszögű háromszögben $AFM\sphericalangle = \alpha$. Mivel $AE = AF$, ezért az EAB és AFM derékszögű háromszögek egybevágók. Ez azt jelenti, hogy

(1) $$MA = BE = 2x \text{ és } FM = AB = 1.$$

(1 pont)

Az (1) összefüggések alapján belátható, hogy az FBM és a DEC derékszögű háromszögek is egybevágók, hiszen $BM = EC = 1 - 2x$ és $MF = CD = 1$. Ebből pedig adódik, hogy $FB = DE$.

(1 pont)

Az OBF háromszögben

$$OBF\sphericalangle = 45° + 180° - FBM\sphericalangle = 225° - FBM\sphericalangle,$$

az OED háromszögben pedig

$$OED\sphericalangle = 45° + 180° - DEC\sphericalangle = 225° - DEC\sphericalangle.$$

Az FBM és DEC háromszögek egybevágósága alapján $FBM\sphericalangle = DEC\sphericalangle$, és így

(2) $$OBF\sphericalangle = OED\sphericalangle.$$

(1 pont)

Figyelembe véve a (2) összefüggést, valamint azt, hogy $OE = OB$ és $DE = FB$, belátható, hogy az OED és OBF háromszögek egybevágók, ahonnan következik, hogy $OD = OF$.
Ugyanakkor az OE szakasznak az O pont körüli $+90°$-os elforgatottja éppen az OB szakasz, tehát az OD szakasznak az O pont körüli $+90°$-os elforgatottja az OF szakasz lesz.
Az elforgatásból az is következik, hogy az OEQ háromszög $+90°$-os elforgatottja az OBP háromszög.
Mivel az OEB háromszög területe a $4x^2$ területű $BHKE$ négyzet területének negyede, ezért az $OQBP$ négyszög területe ugyanennyi, vagyis

(3) $$T_{OQBP} = x^2,$$

ami éppen az ODF háromszög $BHKE$ négyzettel nem közös részének területe.

(2 pont)

Már csak azt kell igazolnunk, hogy az ODF háromszög területe $T_{ODF} = x^2 + 1$, hiszen $T_{ABCD} = 1$.
Az előzőek alapján az ODF háromszög egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek területe

(4) $$T_{ODF} = \frac{OD^2}{2}.$$

Az O pont az AH és BC egyenesektől x távolságra van, emiatt $NA = x$, és így $ND = 1 - x$, illetve $ON = 1 + x$.
Az ODN derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$OD^2 = (1 - x)^2 + (1 + x)^2.$$

A műveletek elvégzése és az összevonások után kapjuk, hogy $OD^2 = 2x^2 + 2$, amelyből a (4) alapján

$$T_{ODF} = x^2 + 1.$$

(2 pont)

Tehát, a $T_{ODF} = x^2 + 1$, így, ha ebből levonjuk a $BHKE$ négyzettel közös rész $T_{OQBP} = x^2$ területét, akkor a különbség 1 lesz, ez pedig éppen az $ABCD$ négyzet területével egyenlő. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

(1 pont)

Összesen: 9 pont