12. ÉVFOLYAM FELADATAI

1. A $\{b_n\}$ számsorozatot a következőképpen definiáljuk:

$b_1 = 1 - \frac{1}{k}$, ahol a k 0-tól és 1-től különböző valós szám,

$b_n = 1 - \frac{1}{b_{n-1}}$, ha $n \geq 2$ egész szám.

Ha tudjuk, hogy $b_{2024} + b_{2025} = -1$, akkor mennyi lehet a k értéke?

2. Hány olyan részhalmaza van az $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$ halmaznak, amelyre teljesül, hogy elemeinek száma olyan pozitív egész szám, ami nem eleme a részhalmaznak?

3. Adott a síkon 2025 darab pont úgy, hogy bármelyik két pont távolsága legfeljebb 3 cm. Igazoljuk, hogy az összes pont lefedhető egy 8,1 cm^2-nél kisebb területű hatszöglappal.

4. Az 1 m^3 térfogatú téglatest alakú doboz két oldallapja nyolcszor drágább anyagból készül, mint a többi négy oldallap. Milyen méretűnek válasszuk a téglatest éleit, hogy minél kisebb legyen az anyagköltség?

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$\sqrt{13 + \sqrt{\frac{27}{3x^2 + 2x - 5}}} = 13 - \frac{27}{3x^2 + 2x - 5}$$

6. Egy háromszög $a,\ b,\ c$ oldalainak hossza ebben a sorrendben egy növekvő mértani sorozat három egymást követő tagja. Ha a háromszög szögei (a szokásos jelölésekkel) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, akkor igazoljuk az alábbi állításokat:

a) $\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} > \frac{1}{\sin\alpha}$,

b) $\sin\beta + \sin\gamma < \left(2 + \sqrt{5}\right) \cdot \sin\alpha$.