11. ÉVFOLYAM FELADATAI

1. Határozzuk meg az (1) és (2) egyenletek összes közös gyökét:

(1) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$,

(2) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = 0$.

2. 12 darab 80 literes hordóban vizet tárolunk, mégpedig rendre 1, 2, 3, 4, …, 12 litert. Bármelyik hordóból átönthetünk vizet egy másik hordóba a következő szabály szerint: ha az első hordóban legalább annyi víz van, mint a másodikban, akkor az első hordóból pontosan annyi vizet önthetünk át a másodikba, mint amennyi a másodikban van. Lehetséges-e véges számú átöntés után elérni azt, hogy

a) öt hordóban legyen 3-3 liter víz legyen, a maradék hét hordóban pedig 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 liter;

b) egy hordóban 78 liter víz legyen?

3. Egy játék kezdetén a táblára felírták a 10-es számot. Anna és Boglárka felváltva lépnek, Anna lép először. Egy lépésben le kell törölni a táblán lévő számot, és helyette egy olyan egész számot kell felírni, amely a letörölt számnál nagyobb, de annak négyszeresénél nem nagyobb. Az nyeri a játékot, aki a 2025-öt írja fel a táblára. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Adjuk meg ezt a nyerő stratégiát.

4. Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 20°$ és $BCA\sphericalangle = 30°$. Legyen M pont a háromszög belső tartományában, amelyre $MAC\sphericalangle = MCA\sphericalangle = 10°$. Mekkora a BMC szög?

5. Határozzuk meg azokat az x pozitív egész számokat, amelyekre az $E(x) = x^2 + 2x - (2x+1)\sqrt{x+1}$ kifejezés értéke négyzetszám.

6. Az $ABCD$ konvex érintőnégyszög oldalai különböző hosszúságúak. A négyszögbe írt kör az AB, BC, CD, DA oldalakat rendre a K, L, M, N pontokban érinti. Mutassuk meg, hogy a KL és NM egyenesek az AC átló egyenesén metszik egymást.