10. ÉVFOLYAM FELADATAI

1. Egy számsorozat tagjaira teljesül, hogy bármely tagjához hozzáadva a rákövetkező tag reciprokát, eredményül 1-et kapunk. Ha tudjuk, hogy a számsorozat első 2024 tagjának szorzata 2, akkor mennyi a sorozat 2025. tagja?

2. Legyenek x és y olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $[x] + [y] = 1$.

a) Igazoljuk, hogy $2 \leq [x^2] + [x^2 + y^2] + [y^2] \leq 7$.

b) Adjunk olyan példát $(x;\ y)$ valós számpárokra, amelyekre pontosan az alsó, illetve a felső korlát adódik.

($[z]$ a z valós szám egész részét jelenti.)

3. A hegyesszögű ABC háromszögben a B és C csúcsból bocsátott magasságok talppontja rendre B_1 és C_1. Jelöljük D-vel a B_1-en áthaladó, az AB-re merőleges talppontját, illetve a D-ből a BC-re állított merőleges egyenes és a BB_1 metszéspontja legyen E. Igazoljuk, hogy a C_1E egyenes párhuzamos az AC egyenessel.

4. A Kerekerdő közepén lovagok élnek, közülük a leghíresebb Behemót. Bármely két lovag vagy barátja, vagy ellensége egymásnak. A lovagok valamennyien felesküdtek rá, és be is tartják a Kerekerdő Lovagjainak legfontosabb törvényét: „A barátom ellensége az én ellenségem is egyben.”. Mindegyik lovagnak pontosan 4 ellensége van. Hány lovag élhet a Kerekerdő közepén? (A kapcsolatokat kölcsönösnek tekintjük.)

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet.

$$x^2 + 4x - (2x + 3)\sqrt{x + 3} = 105$$

6. Az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet AB oldalán az E, BC oldalán az F belső pontokat úgy vettük fel, hogy az $FDE\sphericalangle\ =\ 45°$ teljesül. Az AC átló az ED szakaszt a P, az FD szakaszt a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AP, PQ, QC szakaszokból derékszögű háromszög szerkeszthető.